

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2021～2023

課題番号：21K03214

研究課題名（和文）可積分幾何と部分多様体の研究

研究課題名（英文）Research on integrable geometry and submanifolds

研究代表者

宮岡 礼子（Miyaoka, Reiko）

東北大学・理学研究科・名誉教授

研究者番号：70108182

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,800,000円

研究成果の概要（和文）：球面の等径超曲面 N のガウス像 L のフレアホモロジーの計算の未解決部分に対し、 N のコホモロジーの計算をより一般の空間に適用可能にして、 L の位相の計算を行った。特に非等質な例を無限に含むClifford代数に関わる場合に、一部で L のコホモロジーまで計算した。大阪公立大の大仁田義裕教授、茨城大の入江博准教授との共同研究である。

極小曲面に関して、可積分方程式の解を用いた複素射影空間における極小ラグランジュ曲面の計量を特徴付ける研究、および代数的極小曲面のガウス写像の除外値問題に取り組んだ。最近極小超曲面に関するChern予想をDupin超曲面について研究している。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Arnold予想の解決につながるフレア理論において、フレアホモロジーは特殊な場合にしか計算されておらず、非等質例を無限に含む等径超曲面のガウス像は好い対象であるが、その位相は複雑なので、その未解決部分に挑戦をしている。

極小曲面論は可積分系理論との関連において、曲面の計量のみならず2次元戸田方程式の解との関係が重要である。以前得た周期解と曲面の構造の関係を、複素射影空間の極小ラグランジュ曲面に適用すると興味深い結果が得られる。また代数的極小曲面のガウス写像の除外値問題は難解でライフワークとして取り組んでいる。Chern予想にDupin超曲面で取り組むことは斬新である。

研究成果の概要（英文）：Regarding the unresolved part of the Floer homology of the Gauss image L of a spherical isoparametric hypersurface N , we made the calculation of the topology of N applicable to more general spaces, and partially solved the calculation of the cohomology of L . Particularly in the case related to the Clifford algebra containing an infinite number of non-homogeneous examples, we have even calculated the cohomology of L in some cases. This is a collaborative research with Yoshihiro Ohnita of Osaka Metropolitan University and Hiroshi Irie of Ibaraki University.

Regarding minimal surfaces, we have conducted research on metrically characterizing minimal Lagrangian surfaces in complex projective spaces, using periodic solutions of some integrable equation. We have also worked on the excluded value problem of Gauss maps of algebraic minimal surfaces.

Recently, we are studying the Chern conjecture in the case of Dupin hypersurfaces.

研究分野：微分幾何学

キーワード：等径超曲面 ガウス写像 フレア理論 ラグランジュ部分多様体 極小曲面 2次元戸田方程式 除外値問題 Chern予想

1. 研究開始当初の背景

- (1) 球面の等径超曲面の分類が終わったのち、等径超曲面 N のガウス写像の像 L が複素 2 次超曲面のラグランジュ部分多様体であることから、フレアホモロジー論における交叉性の研究に興味をもった。1 つ論文を書き、その未解決部分の解決を目標として共同研究を行ってきた。交叉性が示せれば、フレアホモロジーは非自明になり得るのでそれを計算する意味が生じる。
- (2) 以前、極小曲面に関係する 2 次元戸田方程式論について、その周期型解と超共形的調和写像の関係を明らかにした。他方 2 次元複素射影空間の極小ラグランジュ曲面の大部分が超共形的調和写像であることから、新たな知見が得られる見込みが出てきた。また代数的極小曲面のガウス写像の除外値問題にも共同研究として取り組んでいる。
- (3) 当初の目的にはなかったが、球面の極小超曲面の Chern 予想に Dupin 超曲面の立場から取り組み始めている。中国の Chern 予想に関する多くの論文から刺激を受けた。

2. 研究の目的

- (1) 最終目的は L のフレアコホモロジーの計算であるが、 L は N を有限巡回群 Z_g で割った構造をもち g が素数でない $g=4,6$ については L のコホモロジーすら不明の場合があるので、まずこの計算を目的とする。さらにスペクトル系列を用いるなどして L のフレアコホモロジーの計算に挑む。
- (2) 複素射影空間の極小ラグランジュ曲面は余次元 2 で多くのことが知られているが、ここでは一般余次元で同じ計量を持つ極小曲面を調べる。その中でティツァイカ方程式の周期解に対応するものを特徴づけることが目的である。除外値問題については名大の小林亮一教授と研究しているが Nevanlinna 理論を円板上で構築するという非常に難解な目的に対し、普遍被覆に上げない議論も検討中である。
- (3) Dupin 超曲面は等径超曲面の弱い概念であるが、Lie の球面幾何というリーマン幾何のカテゴリーからはみ出した概念である。忘れられた幾何であるが、その重要性を示す目的がある。Chern 予想そのものも大変興味深い。スカラー曲率の条件は次元が上がるほどに弱い条件となり困難さが増していくので、チャレンジする価値がある。

3. 研究の方法

- (1) N 自身のコホモロジーの計算を、新たな手法「 N を焦部分多様体 F 上の球面束として捉え、Thom-Gysin 完全列を適用する」により行った。Munzner による、「 N が球面を二つの円板束に分解する」ことを使わないので、より多くの空間における計算に適用可能な手法である。これを踏まえて L のコホモロジーを求める。また、フレアホモロジーに関しては新たなスペクトル系列を適用することを考えている。以前の論文の共著者である清華大学の H.Ma 教授とも打ち合わせ再開し、国際共同研究を目指す。
- (2) 極小曲面を計量で特徴づけることは E. Calabi の時代からの問題である。戸田方程式との関連は以前の球面の極小曲面の計量に関する Lawson 予想の研究に端を発し、その後周期解の議論と結びついた。この方針を貫く。
- (3) 以前 Lie 球面幾何の不変量である Lie 曲率を発見した。それを用いると、高次元、または主曲率の個数 g が 4 以上の困難な場合を議論することができる。この不変量は離散曲面を 4 角形分割で定義する際にも重要な役割を果たしてきた。Dupin 超曲面に対しても非常に有効な方法を与える。

4. 研究成果

- (1) 可積分幾何に関して、球面内の等径超曲面 N のガウス像 L のフレアコホモロジーの計算は、ハミルトン交叉性を示した上での最終課題である。一部解決しているが、手始めに L の有限被覆である N のコホモロジーの計算を、上に述べた新たな手法で再度行うことにより、 L の位相の計算に向けて進展させている。特に主曲率の個数 $g=4$ で現れる Clifford 代数の表現に随伴する等径超曲面は、非等質な例を無限に含む点で興味深い。 L は N を有限巡回群 Z_g で割った構造をもち、 g が素数でない $g=4,6$ が問題なので、幾何学的な構造解明が必要となる。一部 L のコホモロジーを求める最終目的まで達成し、さらに未解決部分に繋げる可能性を得た。問題点は等径超曲面が単連結でない場合に集中しており、困難の原因となっている。フレアホモロジーの計算は、共同研究者である茨城大の入江博氏により色々なスペクトル系列を使う手法で試みている。この研究は大阪公立大の大仁田義裕教授、中国清華大学 H.Ma

教授と4名で行っている。

- (2) 球面の極小曲面の計量に関する Lawson 予想においては、球面 Ricci 条件が戸田方程式の周期解の構成の基礎である。複素射影空間の極小ラグランジュ曲面においては、 $1/3$ -Ricci 条件というものが計量の性質を反映することを、徳島大学の國川慶太氏と発見した。高次元複素射影空間の中でこの条件を満たす計量をもつ極小曲面は、低次元空間に入っている極小ラグランジュ曲面の、ある意味重ね合わせで得られることが示される。当初論文にするには簡単すぎるかと思ったが、非自明、重要なことなので論文準備中である。代数的極小曲面のガウス写像の除外値問題に関しては、名大の小林亮一教授と研究しているが Nevanlinna 理論を円板上で構築するという非常に難解な議論で、準備中の論文は5篇におよぶ。また普遍被覆に上げない議論も検討中である。
- (3) Chern 予想は「スカラー曲率一定な球面の極小超曲面は等径超曲面である」という予想であるが、高次元、または主曲率の個数が多い場合は非常に困難で、おそらくこの条件だけでは解決できるとは思われない。そこでこの予想を Dupin 超曲面について研究した。結果として、超曲面のコンパクト性を仮定すると、 $g=3$ では極小性より弱く平均曲率一定、 $g=4$ では平均曲率かつスカラー曲率一定、 $g=6$ では平均曲率あるいはスカラー曲率のいずれかと Lie 曲率が一定であれば等径超曲面になることを証明し、Dupin 超曲面についてはほぼ答がでた。論文は投稿準備中である。

その他：

この研究期間中に共立出版から書籍「極小曲面」を出版した。また、いくつかの科学雑誌に啓蒙記事を執筆、さらに日本数学会での市民講演、岡シンポジウムでの講演、NHK 放送講座の講演などの啓蒙活動を行った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 宮岡礼子	4. 巻 59
2. 論文標題 ユークリッド幾何学から非ユークリッド幾何学へ	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 数理科学	6. 最初と最後の頁 7-15
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 宮岡礼子	4. 巻 93-2
2. 論文標題 E.Calabiに思いを寄せて	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 科学	6. 最初と最後の頁 103-105
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 宮岡礼子	4. 巻 20
2. 論文標題 光の波面の幾何学から	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 岡シンポジウム講義録	6. 最初と最後の頁 67-102
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 宮岡礼子	4. 巻 28-4
2. 論文標題 iの発見と破面の幾何学	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 数学通信	6. 最初と最後の頁 5-25
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 宮岡礼子	4. 巻 62-2
2. 論文標題 曲線と曲面を考える--様々な視点からの導入--	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 数理科学	6. 最初と最後の頁 5-6
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 宮岡礼子	4. 巻 60
2. 論文標題 研究室の窓「原点は極小曲面」	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 数理科学	6. 最初と最後の頁 70-76
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Reiko Miyaoka	4. 巻 64
2. 論文標題 Moment maps and isoparametric hypersurfaces of OT-FKM type	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Science China Mathematics	6. 最初と最後の頁 1621-1628
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11425-020-1746-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件(うち招待講演 7件/うち国際学会 3件)

1. 発表者名 Reiko Miyaoka
2. 発表標題 Review of my research
3. 学会等名 The 3rd Shot of The 13th MSJ-SI "Differential Geometry and Integrable Systems" (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 宮岡礼子
2. 発表標題 i の発見と波面の幾何学
3. 学会等名 2023年度日本数学会秋季総合分科会市民講演会 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 宮岡礼子
2. 発表標題 極小曲面を解析する
3. 学会等名 NHK文化センター数学講座 現代数学の最先端 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Reiko Miyaoka
2. 発表標題 Recent progress on the topology of Gauss images of isoparametric hypersurfaces
3. 学会等名 Symmetry in Geometry and Analysis (a conference in honor of Prof. Toshiyuki Kobayashi) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Reiko Miyaoka
2. 発表標題 Various aspects of isoparametric hypersurfaces
3. 学会等名 The 2nd Shot of The 13th MSJ-SI "Differential Geometry and Integrable Systems" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 宮岡礼子
2. 発表標題 Geometry of light wave fronts
3. 学会等名 20th Oka Symposium (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 宮岡礼子
2. 発表標題 等径超曲面のガウス像のラグランジュ交叉理論へのアプローチ
3. 学会等名 平戸微分幾何学研究討論会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 宮岡 礼子	4. 発行年 2022年
2. 出版社 共立出版	5. 総ページ数 252
3. 書名 極小曲面	

〔産業財産権〕

〔その他〕

Reiko Miyaoka http://www.math.tohoku.ac.jp/people/miyaoka/indexv3.html
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 第6回中国-日本幾何学研究集会	開催年 2021年～2021年
---------------------------	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------