

令和 6 年 6 月 7 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2021～2023

課題番号：21K03242

研究課題名（和文）場の量子論と三次元トポロジーの相互作用から導出される不変量の恒等式の理解

研究課題名（英文）The understanding of the identity derived from the interaction between quantum field theory and 3-dimensional topology

研究代表者

山口 祥司（YAMAGUCHI, Yoshikazu）

早稲田大学・商学大学院・准教授

研究者番号：30534044

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,600,000円

研究成果の概要（和文）：物理学の場の量子論における研究から提唱された「ライデマイスタートーションの消滅恒等式」を円周上の穴あきトーラス束とみなせる双曲三次元多様体において研究し、新しく無限個の成立例を与えることができた。本研究開始時ではライデマイスタートーションの消滅恒等式が成立する円周上の穴あきトーラス束はいくつかの付加条件を満たす必要があると思われていた。消滅恒等式を提唱した研究者たちと研究交流を通じて、当初の予想よりも少ない仮定をおいた円周上の穴あきトーラス束においてライデマイスタートーションの消滅恒等式が成立することを証明できた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では物理学の場の量子論の研究から提唱された三次元多様体の位相不変量の公式について新たな成立例を無限個与えることに成功した。近年、場の量子論における物理量と三次元多様体や結び目の不変量の間さまざまな対応関係が存在するのではないかと期待されており、ライデマイスタートーションの消滅恒等式の成立例は期待される対応関係の存在を支持する。本研究結果によりライデマイスタートーションの消滅恒等式の新たな成立例が提示できたことは物理学における場の量子論と三次元幾何学および三次元多様体のトポロジーの研究をつなぐ対応関係の存在を新たに支持することになる。

研究成果の概要（英文）：The vanishing identity of the adjoint Reidemeister torsion was proposed by the study of quantum field theory in physics. We proved this vanishing identity for the once-punctured torus bundles over the circle which provide infinitely many new examples of the vanishing identity of the adjoint Reidemeister torsion. We established the proof of the vanishing identity for the once-punctured torus bundles with less assumptions than we expected at first according to the discussion with the researchers who proposed the vanishing identity.

研究分野：位相幾何学

キーワード：ライデマイスタートーション 穴あきトーラス束 三次元双曲多様体 消滅恒等式 特殊線形群 基本群の表現

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

物理学の場の量子論における物理量と幾何学における三次元多様体・結び目の不変量の間に対応関係の存在が期待されている。期待される対応関係から、代表者が研究を続けてきた三次元多様体の位相不変量ライデマイスタートーションにおいて消滅恒等式が成り立つのではないかという予想が韓国の研究者たちによって提唱されていた。予想を提出した韓国の研究者たちは三次元球面内の結び目の外部空間とみなせる三次元双曲多様体において成立例を多数報告していたが、結び目の外部空間以外の双曲多様体においてははまだ成立例が見つかっていない状況にあった。

消滅恒等式は三次元双曲多様体の双曲構造のパラメータ空間とみなせる指標代数多様体を使ってライデマイスタートーションの逆数和を定めると 0 になるという予想であり、消滅恒等式の成否を調べるためには指標代数多様体を調査しておく必要がある。指標代数多様体がよく調べられている三次元双曲多様体としては、結び目の外部空間以外には円周上の穴あきトーラス束とみなせる三次元双曲多様体が存在していた。しかしながら、円周上の穴あきトーラス束についてライデマイスタートーションの消滅恒等式を体系的に考察した研究は存在していない状況にあった。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、ライデマイスタートーションとよばれる三次元多様体の位相不変量が満たすと期待されている消滅恒等式が円周上の穴あきトーラス束とみなせる三次元双曲多様体において成り立つことを証明することである。有限個の例外を除き円周上の穴あきトーラス束は三次元球面内の結び目の外部空間とはみなせない三次元双曲多様体になるため、ライデマイスタートーションの消滅恒等式の新しい成立例を無限個与えることになる。

さらに円周上の穴あきトーラス束の指標代数多様体の中には消滅恒等式の成立例を与える結び目の外部空間と異なる構造をもつものが存在する。円周上の穴あきトーラス束において消滅恒等式を証明する際には、ライデマイスタートーションの逆数和の定め方に改良を施す必要もあり得る。円周上の穴あきトーラス束において消滅恒等式に現れるライデマイスタートーションの逆数和を調査し、必要に応じて消滅恒等式の定式化の改良を行うことも目的とする。

### 3. 研究の方法

消滅恒等式は三次元双曲多様体の指標代数多様体を使ってライデマイスタートーションの逆数和を定めるため、円周上の穴あきトーラス束の中でも指標代数多様体が調査されているものを選び、消滅恒等式におけるライデマイスタートーションの逆数和が 0 になることを証明する。

具体的には

消滅恒等式におけるライデマイスタートーションの逆数和は三次元双曲多様体の指標代数多様体を用いて定められるので、ライデマイスタートーションの値を指標代数多様体の定義方程式から求める公式を導出する

指標代数多様体が定めるライデマイスタートーションの逆数和を で開発した指標代数多様体の定義方程式を使った公式で表し、指標代数多様体を含む代数多様体上で成立する留数定理を応用することで逆数和が 0 になることを示す

ここで必要に応じて指標代数多様体が定めるライデマイスタートーションの逆数和のとり方にも改良を施す

一般の穴あきトーラス束とみなせる三次元双曲多様体においても、指標代数多様体が定めるライデマイスタートーションの逆数和を指標代数多様体の定義方程式から求める方法を開発し、一般の穴あきトーラス束とみなせる三次元双曲多様体においても消滅恒等式が成り立つことを証明する

ことを計画していた。

### 4. 研究成果

本研究成果では、残念ながら一般の円周上の穴あきトーラス束においてはライデマイスタートーションを指標代数多様体の定義方程式から導出するために適切な定義方程式を探す段階にとどまったが、基本群が 2 元生成群になる円周上の穴あきトーラス束においてはライデマイスタートーションの消滅恒等式が成り立つことを以下のように証明することができた。

- ライデマイスタートーションの値を指標代数多様体の定義方程式から定まるヤコビ行列式をつかって求める公式を導出し、
- 指標代数多様体が定めるライデマイスタートーションの逆数和を指標代数多様体上の多項式関数の分数和とみなし、代数幾何学で確立されている留数定理を応用して分数和が 0 になることを証明した。

本研究開始時に代表者は、円周上の穴あきトーラス束とみなせる三次元双曲多様体の中にライデマイスタートーションの消滅恒等式が成り立たないと思われる候補を見つけていた。消滅恒等式の反例候補となる円周上の穴あきトーラス束の指標代数多様体は成立例として知られている結び目の外部空間の指標代数多様体とは異なる構造をもっているため、消滅恒等式において指標代数多様体が定めるライデマイスタートーションの逆数和の取り方を改良するアイデアを準備していた。しかしながら、ライデマイスタートーションの消滅恒等式予想を提案した韓国の研究者たちとの研究交流(セミナーでの講演とディスカッション)を通じて、本研究開始時に知られていた消滅恒等式の成立例となる結び目の外部空間とは異なる構造の指標代数多様体をもつ円周上の穴あきトーラス束においても定式化を変えずに消滅恒等式が成り立つことを証明することができた。

結果として基本群が2元生成群になるすべての円周上の穴あきトーラス束という三次元双曲多様体がライデマイスタートーションの消滅恒等式の新たな成立例になるという成果を得た。本研究開始時に予想された定式化の改良・修正を行わずに消滅恒等式を証明できたので、当初の予想より多くの三次元双曲多様体においてライデマイスタートーションの消滅恒等式が成り立つことを示すことができた。

また消滅恒等式で扱うライデマイスタートーションの逆数和は三次元双曲多様体以外にも定めることができ、やはり定数値になることが予想されている。本研究では三次元球面内のトーラス結び目の外部空間という三次元非双曲多様体において、消滅恒等式と同様のライデマイスタートーションの逆数和は絶対値が2になることも証明している。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 山口 祥司
2. 発表標題 Adjoint Reidemeister torsion for hyperbolic once-punctured torus bundles
3. 学会等名 東京女子大トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 山口 祥司
2. 発表標題 On a vanishing identity of the adjoint Reidemeister torsion
3. 学会等名 トポロジーとコンピュータ2021（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshikazu Yamaguchi
2. 発表標題 Adjoint Reidemeister torsions of once-punctured torus bundles
3. 学会等名 KAIST Seminar（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshikazu Yamaguchi
2. 発表標題 Adjoint Reidemeister torsion for hyperbolic once-punctured torus bundles
3. 学会等名 SPS-VAST Bilateral Joint Research Project Workshop "Singularities, arrangements, and low-dim. topology"
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	The University of Texas at Dallas			