様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　 ６ 月　 ７ 日現在

機関番号：３２６４４
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2021～2023
課題番号：２１K０３２５５
研究課題名（和文）コンピュータを効果的に利用したチャート変形の研究

研究課題名（英文）Research of chart moves by using computer effectively

研究代表者
志摩　亜希子（Shima, Akiko）

東海大学・理学部・教授

研究者番号：５０３１７７６５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：4次元空間内の曲面(曲面絡み目)を平面内のグラフ(チャートという)で表す手法が鎌田氏により開発された。チャートを用いて分類表を作成するのが目的である。2つの交差を含むチャートの大まかな分類は終わっている。完全な分類のために、この内、辺のラベルが1,2,3のみの4-チャートで、黒頂点が8個のものについて調べた。これらは無限個あり(同じ曲面絡み目を表すかもしれないが)、その半分のチャートが表す曲面絡み目が異なることを証明した。この結果はコンピュータを用いて、ある quandle の彩色数を計算して予想され、証明した。最小チャート(分類表に載せるべきチャート)かどうかはまだわかっていない。

研究成果の学術的意義や社会的意義
幾何学の分野で、図形を分類するのは大きな目標である。その中の4次元空間内の曲面(曲面絡み目)の分類に貢献した研究である。曲面絡み目は実際に描くことが難しいようであるが、鎌田氏により、平面のグラフ(チャートという)で描くことが可能になった。そのため、大まかな分類が可能になり、詳細な分類のためにコンピューターを使って、彩色数を計算することが出来た。完全な分類にはまだまだ道半ばであるが、2個の交差をもつ4-チャートの中に無限個の曲面絡み目を表すチャートが見つかり、私としては興味深い研究であった。

研究成果の概要（英文）：Kamada developed a display of a surface-link in the 4-dimensinal space by drawing a graph in the plane called a chart. We want to make a table of surface-links by using charts.
We almost classify charts with 2 crossings. To classify completely, we investigate 4-charts (having edges of labels 1, 2 or 3) with 2 crossings and 8 black vertices. There are infinitely many such 4-charts. We show that surface-links described by the half of these charts are not equivalent for each. We have a conjecture by calculating some simple quandle by using a cumputer, and then we show the result. However we do not know that these charts are minimal charts.

研究分野：topology

キーワード：surface link　chart　crossing　quandle　coloring

１．研究開始当初の背景

４次元空間内の曲面(曲面絡み目)の研究は、モーション・ピクチャーやダイアグラムという手法を用いて研究する方法がある。最初の手法は、４次元空間内の図形を時間とともに３次元空間内の図形が変化するものと考える手法である。２番目の手法は、４次元空間の図形を $p(x,y,z,w)=(x,y,z)$ という写像 p で３次元空間に射影し、その像で４次元空間の図形を捉える手法である。どちらも直観的で分かりやすい手法であるが、立体図形を扱う必要があり、欠点もある。鎌田氏[1],[2]によって、平面内のグラフ(辺にラベルと向きが付けられたグラフ)により、曲面絡み目を表示する画期的な方法が開発された(チャートという)。例えば、図１のグラフが 4-チャートの例である(ただし、黒色の辺はラベル１の辺、赤色の辺はラベル２の辺、緑色の辺はラベル３の辺を意味する)。４次元空間内の曲面の変形を、チャート変形と呼ばれる平面内の変形で、ある程度表すことも可能になっている。このチャートを用いて、曲面絡み目の分類表を作成することがこの研究の動機である。３次元空間内の閉じた紐(結び目)については、交差点数に関する分類表があり、結び目理論の発展に大いに役立っている。曲面絡み目の分類表を作成することにより、こちらの分野も発展すると期待される。

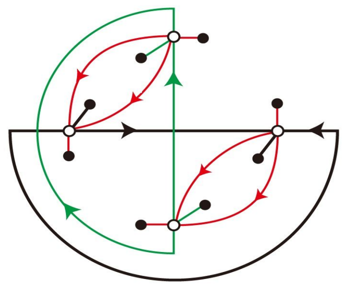
図１　4-チャート T_0

３次元空間内の結び目にも深く関係するブレイド群

$B_n=\langle \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}\ (i=1,2,\cdots,n-1)\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i\ (|i-j|>1)\rangle$

というものがあるが、最初の関係式は white vertex と呼ばれる頂点(次数が６の頂点)に対応し、２番目の関係式は crossing と呼ばれる頂点(次数が４の頂点)に対応することが知られている。ブレイド群 B_n の２つの元が同じであるとき、自然に円板上のチャート(境界に交わりがある) が構成される。従って、チャート変形を研究することは単に曲面結び目を研究するだけでなく、ブレイド群を研究することにも結びついている。このチャート表示は、曲面絡み目に限らず、チャート理論[3],[4]として拡張され、モノドロミー表現の図式に関する理論が作られている。この表示を使うことにより、４次元多様体である Lefschetz ファイバー空間を曲面上のラベル付き有向グラフとして捉えることが出来る。頂点やチャート変形は上のチャートより複雑になる。チャート変形を研究することは、４次元多様体を研究することにも繋がっている。

２．研究の目的

研究の目的は曲面結び目(または曲面絡み目)を変えないチャートの同値変形、チャート変形を研究し、曲面絡み目や Braid 群について調べることである。３次元空間内の結び目は交差点数に関する分類表があり、結び目理論の発展に大いに役立っている。曲面結び目理論の発展や曲面絡み目の分類のために、チャートの分類表を作成することを目的とする。

チャートの表示自体は、ノートの上に描くことが可能なグラフであるが、頂点の数が増えると幾何級数的に数が増える。それらのどれがチャート変形で移り合うか判定することは難しい。しかしながら、これまでの研究([5],[6],[7]) で、crossing の少ない領域では、チャートの特徴が解明されつつあり、crossing が２個のチャートの形を決定するに至っている。しかし、まだ候補がすべて挙げられた段階で、すべて異なる曲面絡み目を表しているかの決定がまだされていない。これらを分類して、チャートを用いた曲面絡み目の分類表を作成することが

この研究の目的である。

３．研究の方法

最近独自に開発したプログラムで、チャートの分類のために有効な不変量を見つける。このプログラムは、チャートをコンピューターに入力し(頂点と辺のつながりなどを数字で入力)、quandle というものを使って、彩色数を計算するものである。今はまだ実験段階で、crossing が２個の4-チャートを調べている(ここで、4-チャートとは、辺のラベルが1,2,3 のいずれかであるチャートである)。この 4-チャートの候補は無限個あるが、形が規則的なので、コンピューターで手入力せずに、これらのチャートのコンピューター用のデータを自動的に作成するプログラムも作成し、多くの彩色数を計算することが出来た。これにより、無限個の異なる曲面絡み目を含んでいるらしいと予想が立てられ、厳密に数学的に証明をつけることが出来た。コンピューターで多くの不変量を計算し、規則を探し、それが正しいか数学的に証明を付けるという研究方法である。今回得られた詳しい結果については、研究成果を見て下さい。

４．研究成果

(1) 4-チャートで、crossing の数が丁度２個であり、black vertex (次数が1の頂点)が丁度8個のものを考えた。その内、4-チャート が表す曲面絡み目の成分数が2であるものをコンピューターで調べた。彩色数計算したところ、簡単な quandle(quandle の元の数が3のもの)を使って、これらのチャートが表す曲面絡み目が自明な曲面絡み目でないという予想が得られた。実際に、手を使って計算して、これらのチャートが表す曲面絡み目が自明な曲面絡み目でないことが示された。また別の quandle 達を使うと、これらの曲面絡み目が互いに異なるものであるらしいと予想が得られた。この quandle Q_n の元は 1,2,3,..., n であり、演算が、i*j=i (i が n でないとき)というほぼ単純な演算をもつ quandle である。

(2) 上の予想が正しいことを証明した。正確に述べると次のようである。
4-チャートで丁度 crossing が2個のものは、具体的なチャートの形を以前求めていた。その中でも black vertex が8個である 4-チャート は無限個あり(同じ曲面絡み目を表すかもしれないが)、T_0, T_1, T_2, …, T_k, … と T_1^*, T_2^*, …, T_k^*, … がある。T_k^* は T_k のラベル 1,2,3 を 3,2,1 に変更して得られるチャートである(例えば 4-チャート T_5 は図2のようなチャートである。ただし、黒色の辺はラベル１の辺、赤色の辺はラベル２の辺、緑色の辺はラベル３の辺を意味する)。その半分のチャート T_0, T_1, T_3, …, T_{2k-1}, … が表す曲面絡み目の成分数は2であるが、これらの曲面絡み目の quandle Q_n による彩色数が異なることを証明した。つまり、以下のように彩色数を計算した(研究業績３)。

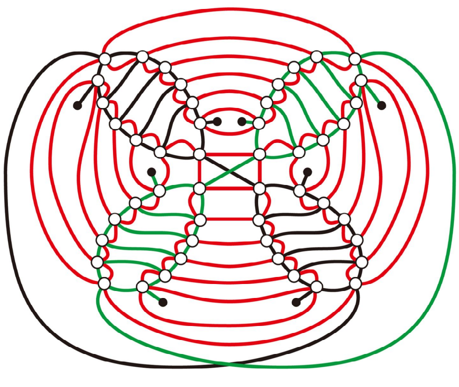

図２　チャート T_5

① $|\mathrm{Col}_{Q_n}(F(T_0))| = (n-1)^2 + 1.$

② $|\mathrm{Col}_{Q_n}(F(T_{2k}))| = n.$

③ $|\mathrm{Col}_{Q_n}(F(T_{2k}^*))| = n.$

④ $|\mathrm{Col}_{Q_{k+2}}(F(T_{2k-1}))| = (k+2)^2$, $|\mathrm{Col}_{Q_{k+2}}(F(T_{2k-1}))| = (k+2)^2.$

⑤ $|\mathrm{Col}_{Q_{k+2}}(F(T_{2\ell-1}))| = (k+1)^2 + 1$, $|\mathrm{Col}_{Q_{k+2}}(F(T_{2\ell-1}^*))| = (k+1)^2 + 1.$
ただし、$1 \leqq \ell < k$ とする．

ここで、チャート Γ に対して、F(Γ) をチャート Γ が表示する曲面絡み目を表すとし、$|\mathrm{Col}_Q(F(\Gamma))|$ を曲面絡み目 F(Γ) の quandle Q による彩色数を表すとする。

(3) 最後に T_1, T_3, …, T_{2k-1}, … が最小チャート(分類表の載せるべきチャート)であるかは

まだ分かっていない。double linking number や去年使用した quandle を使ってカンドルコサイクル不変量を計算したが、期待した結果は残念ながら得られなかった。しかし、最小チャートであることが示されれば、初めて無限個のチャートを分類表に載せることが出来、面白い結果まで後一歩である。

[1] S. Kamada, *2-dimensional braids and chart description*, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute, 277-287 (1992).

[2] S. Kamada, Braid and Knot Theory in Dimension Four, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 95.

[3] S. Kamada, *Graphic descriptions of monodromy representations*, Topology Appl., 154 (2007), 1430--1446.

[4] I. Hasegawa, Chart descriptions of monodromy representations on oriented closed surface, thesis, Univ. of Tokyo, (2006).

[5] T. Nagase and A. Shima, *Minimal chart*, Topology Appl.(2018),291--332.

[6] T. Nagase and A. Shima, *The structure of a minimal n-chart with two crossings I: Complementary domains of* $\Gamma_1 \cup \Gamma_{n-1}$, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 27 (2018) 1850078.

[7] T. Nagase and A. Shima, *The structure of a minimal n-chart with two crossings II*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas, 113 (2018) 1693—1738.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Nagase Teruo、Shima Akiko	４．巻 31
２．論文標題 Properties of minimal charts and their applications VIII: Charts of type (7)	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0218216522500171	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Nagase Teruo、Shima Akiko	４．巻 34
２．論文標題 Properties of minimal charts and their applications IX: charts of type (4,3)	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Indagationes Mathematicae	６．最初と最後の頁 673-723
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.indag.2023.01.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Nagase Teruo、Shima Akiko	４．巻 32
２．論文標題 Distinguishing surface-links described by 4-charts with two crossings and eight black vertices	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S021821652350092X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計2件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 志摩亜希子
２．発表標題 Distinguishing surface-links described by 4-charts with 2 crossings and 8 black vertices
３．学会等名 ４次元トポロジー
４．発表年 2023年

１．発表者名 志摩亜希子
２．発表標題 Distinguishing surface-links described by 4-charts with 2 crossings and 8 black vertices
３．学会等名 カンドルと対称空間
４．発表年 2024年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関