様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６年　６月　４日現在

機関番号：１３３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2021～2023
課題番号：２１Ｋ０３２９１

研究課題名（和文）多変数超幾何関数の数式処理による計算解析

研究課題名（英文）Computer algebra based analysis for hypergeometric functions in some variables

研究代表者
小原　功任（Ohara, Katsuyoshi）

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：００３１３６３５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,300,000円

研究成果の概要（和文）：PBW代数におけるグレブナー基底を用いて，特異点が孤立していない場合にも適用可能な局所コホモロジーの計算方法を与えた(田島・鍋島・梅田との共同研究)．トロピカルWeyl代数におけるグレブナー基底の研究を行い，ブッフバーガー型およびF5型のアルゴリズムを得た(Ari DwiHartantoとの共同研究)．ある特別なタイプの多変数超幾何関数について深く調べ，ランク，特異点配置，特異点配置の補空間の基本群，モノドロミーなどを得た(松本・金子・寺杣との共同研究)．数式処理の手法とその実装方法を述べる教科書を執筆し出版した(高山・野呂・藤本との共著)．

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究の目的は，多変数超幾何関数について，パッフィアン方程式や関数等式などのさまざまな公式(関係式)を数式処理の技法を援用しながら導出することである．これらの公式は純粋数学としての興味だけでなく，応用数学の面からも興味深く実用性のあるものである．例えば，パッフィアン方程式は，多変数超幾何関数やより一般にホロノミック関数の数値評価を行うのに極めて有効である．計算数理統計など関連する諸分野が急速に発展する中で，計算効率のよい公式を探索することの重要性は増している．そのため，それらの公式を組織的に導出していくことは学術的にも重要であり，また社会的にも意義がある．

研究成果の概要（英文）：We developed a method for computing holonomic D-modules associated to a family of non-isolated hypersurface singularities via comprehensive Groebner systems of Poincare-Birkhoff-Witt algebra. (joint work with S.Tajima, K.Nabeshima, and Y.Umeta). We studied Groebner theory in tropical Weyl algebras and obtained algorithms of Buchberger and F5 types (joint work with Ari Dwi Hartanto). We studied a special types of multivariable hypergeometric functions, and obtained its rank, singular locus, fundamental groups of complementary subspace of singular locus, and monodromy. (joint work with K.Matsumoto, J.Kaneko, and T.Terasoma). We published a textbook for mathematical software and its implementation. (co-authored with N.Takayama, M.Noro, and M.Fujimoto).

研究分野：複素解析

キーワード：複素解析　超幾何関数　数式処理

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

ガウス超幾何関数はパラメータをもつ関数である。１９世紀初頭のガウスにはじまり、約２００年の研究の歴史がある。ガウス超幾何関数は、隣接関係式、クンマーの変換、ガウスの２次変換、グルサの３次変換、接続関係式など、さまざまな顕著な性質をもつ。その多数の公式(あるいは公式を導出できるという事実)から、具体的に計算に使うことができる関数(特殊関数)という性質があり、古典解析や物理学などで幅広く用いられている。また、ガウス超幾何関数のパラメータに特殊な関係を与えたり、特別な極限操作(合流操作) を繰り返すと、直交多項式が現れたり、ベッセル関数など有用な関数が現れたりもする。ガウス超幾何微分方程式は２次元の解空間を持つので、解とそのオイラー微分による「導関数」を並べたベクトル値関数は一階の常微分方程式を満す。この方程式をパッフィアン方程式と呼ぶ。原点近くの近似値は級数表示から求まるので、パッフィアン方程式の初期値問題と解釈することで、超幾何微分方程式の解の数値的接続が計算できる。

ガウス超幾何関数の拡張である多変数超幾何関数も、具体的な計算で有用な関数である。例えば、多変数超幾何関数は代数幾何学における周期積分と深い関係があり、多変数超幾何関数で代数方程式の根を表示したり、代数曲線をパラメトライズしたり、尖点のまわりの様子を調べることができる。もしも多変数超幾何関数について基本的な公式がわかれば、代数幾何におけるよい道具となることが期待できる。また統計学における分割表に基づく多項超幾何分布について、期待値の計算やパラメータの決定(最尤推定問題)を行うためには、多変数超幾何関数の具体的な数値計算が必要になってきている。このように多変数超幾何関数の性質を調べ、ガウス超幾何関数と類似した公式を見つけることには価値がある。多変数超幾何関数の場合でも、ベクトル値関数が一階線形偏微分方程式系を満すように表すことができる。これをガウス超幾何関数のときと同様に、パッフィアン方程式と呼ぶ。したがって初期値の計算ができれば、ルンゲ・クッタ法などの数値的手法を用いて解を接続することで、任意の点での関数値・微分値の数値評価が期待される(ホロノミック勾配法)。しかし、多変数の問題では、以下に述べるように、一変数のガウス超幾何関数のときにはなかった障害がある。

多変数超幾何関数は斉次線形偏微分方程式系を満す。これを有理関数係数の微分作用素環における左イデアルの生成系とみる。このとき、この左イデアルによる剰余環の基底の選び方に依存して、パッフィアン方程式を構成することができる。必要な道具はグレブナー基底を用いた、左イデアル計算である。基底を取り替えるとパッフィアン方程式の特異点集合も変化する。もとの偏微分方程式系の(D 加群の意味での)特異点集合にはなかった特異点を見掛けの特異点と呼ぶが、パッフィアン方程式における見掛けの特異点の存在は、数値解析など応用への障害となっている。アペルの超幾何関数など少数の場合を除いて、多変数超幾何関数やホロノミック関数では、基底のよい取り方については未解決問題である。

２．研究の目的

本研究の目的は、多変数超幾何関数について、パッフィアン方程式や関数等式などのさまざまな公式(関係式)を数式処理の技法を援用しながら導出することである。これらの公式は純粋数学としての興味だけでなく、応用数学の面からも興味深く実用性のあるものである。例えば、パッフィアン方程式は、多変数超幾何関数やより一般にホロノミック関数の数値評価を行うのに極めて有効である。これらの公式は純粋数学としての興味だけでなく、応用数学の面からも興味深く実用性のあるものである。例えば、パッフィアン方程式は、多変数超幾何関数やより一般にホロノミック関数の数値評価を行うのに極めて有効である。計算数理統計など関連する諸分野が急速に発展する中で、計算効率のよい公式を探索することの重要性は増している。探索は数式処理システム上に専用のソフトウェアを実装することで行う。この先には、より一般化された多変数超幾何関数の一族に対して、新しい公式を発見し、それらを系統的に理解していくという長期的な目標がある。

３．研究の方法

本研究の目的は、多変数超幾何関数に関する公式を導出することであるが、ここではパッフィアン方程式を例に取り、研究の方法を述べる。
まず多変数超幾何関数は斉次線形偏微分方程式系を満す。これを有理関数係数の微分作用素環における左イデアルの生成系とみる。このとき、この左イデアルによる剰余環の基底を、パッフィアン方程式の基底といい、その基底を用いて、パッフィアン方程式を構成することができる。必要な道具は微分作用素環でのグレブナー基底を用いた、左イデアル計算である。一般にパッフィアン方程式の具体形や特異点集合は、パッフィアン方程式の基底に依存し、また特異点集合 T は、もとの超幾何微分方程式系の D 加群の意味での特異点集合 S の super set になっている。

数値解析の観点からは、特異点集合が小さいほど、ルンゲ・クッタ法などの数値計算法が適用しやすくなる。パッフィアン方程式の基底の選び方は、応用における有用性にも関係する重要なポイントである。特異点集合が最小かつ、極の位数がであるようなパッフィアン方程式とその基底をそれぞれ、よい方程式、よい基底と呼びたい。よい基底が存在するか否かは未解決問題であり、よい基底を選ぶ一般的方法も知られていない。
そのため、数式処理の技法を援用しながら、具体的な多変数超幾何関数もしくは多変数特殊関数に対し、ケースバイケースで調べていくことになる。つまり、
(1) 特異点集合 S を求める(グレブナー基底の方法で実行可能)
(2) できるだけ、T が S に近くなるような、パッフィアン方程式の基底を探す
(3)パッフィアン方程式を具体的に与える(グレブナー基底の方法で実行可能)。
という手順で計算を行う。
ステップ(1)ではワイル代数を考え、ステップ(3)では有理関数係数の微分作用素環を用いるが、それぞれグレブナー基底の方法によって数式処理システムで原理的には計算可能である。実際の計算は計算量の問題が生じるため容易とは限らないが、数学的洞察を用いてボトルネックを突破する。

４．研究成果

本研究の目的は、多変数超幾何関数について、パッフィアン方程式や関数等式などのさまざまな公式(関係式)を数式処理の技法を援用しながら導出することである。これらの公式は D 加群理論や多変数複素解析など純粋数学としての興味だけでなく、応用数学の面からも興味深く実用性のあるものである。また長期的な目標は、より一般化された多変数超幾何関数の一族に対して、新しい公式を発見し、それらを系統的に理解していくことである。

ランク９の２変数超幾何関数 F9 について、そのオイラー型積分表示に現れる局所系について深く研究を行った。一般にオイラー型積分表示について調べることで、超幾何関数の重要な性質が明らかになることが経験的に知られている。研究結果は、学術雑誌に掲載された。

数理統計学に現れる非心複素 Wishart 行列の最大固有値の確率分布について研究を行った。この分布関数は超幾何関数によって表示できることは知られているが、この表示をうまく使って、累積確率の数値計算を行った。研究結果は日本数学会で発表した。論文は学術雑誌への投稿に向けて準備中である。

上記の研究に付随して、グロタンディーク局所留数の厳密な計算アルゴリズムについても研究を進めた。D 加群の理論を援用し、分母を与える多項式集合が、特別な性質をもつ場合と、一般の場合に、それぞれ計算アルゴリズムを構成し、実際に数式処理システムに実装して検証を行った。これらの結果は、学術雑誌に掲載された。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 S. Tajima, K. Nabeshima, K. Ohara, Y. Umeta	４．巻 17
２．論文標題 Computing holonomic D-modules associated to a family of non-isolated hypersurface singularities via comprehensive Groebner systems of PBW algebra	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Mathematics in Computer Science	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11786-022-00553-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 Ari Dwi Hartanto, 小原功任
２．発表標題 On F5 Algorithm for Weyl Algebras over Fields with Valuations
３．学会等名 RIMS共同研究（公開型）「Computer Algebra --- Foundations and Applications」
４．発表年 2022年

１．発表者名 高山信毅,野呂正行,小原功任,藤本光史
２．発表標題 数学ソフトウェアの作り方(WebAssemblyによるCプログラムのWebアプリ化)
３．学会等名 Risa/Asir Conference 2023
４．発表年 2023年

１．発表者名 Ari Dwi Hartanto, 小原功任
２．発表標題 On Tropical Groebner Bases for Rings of Differential Operators D_n(K)
３．学会等名 Risa/Asir Conference 2022
４．発表年 2022年

〔図書〕　計1件

1．著者名	4．発行年
高山信毅，野呂正行,小原功任,藤本 光史	2022年
2．出版社	5．総ページ数
共立出版	252
3．書名	
数学ソフトウェアの作り方	

〔産業財産権〕

〔その他〕

the web page of Katsuyoshi Ohara
http://air.s.kanazawa-u.ac.jp/~ohara/index-j.html

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関