

令和 6 年 6 月 5 日現在

機関番号：15501

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2021～2023

課題番号：21K03311

研究課題名（和文）気体星と地球大気の運動方程式における重力と回転下の真空境界の数学的構造

研究課題名（英文）Mathematical structure of vacuum boundaries of gaseous stars and atmosphere under the gravitation and rotation

研究代表者

牧野 哲 (Makino, Tetu)

山口大学・その他部局等 ・ 名誉教授

研究者番号：00131376

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 900,000 円

研究成果の概要（和文）：気体星や惑星大気の流体力学的運動の数学的モデルは重力下の圧縮性オイラー方程式で与えられるが、その数学的に厳密な解析には、重力と圧力の拮抗により生じる真空との自由境界が現れるので、従来の研究では扱わなかった困難がある。本研究では、軸対称な定常解からの微小なずれを支配する（線型近似した）発展方程式を研究し、初期値問題の解の存在、発展方程式の生成作用素のスペクトル的な性質、解の安定性などについて成果を得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

この研究成果は、宇宙物理学、天文学などの自然科学と数学的理論の融合という学術的意義があり、単に数学的正当化ないし論理的確証を提供するのみならず、新たな論点の提起にもつながる。また、このような数学的理論研究は数値シミュレーション、人工知能による探索と総合されることによって科学技術の堅実な発展を推進するという社会的意義もある。

研究成果の概要（英文）：Motion of internal structure of a gaseous star is governed by the Euler-Poisson equations. Mathematically rigorous analysis has been performed concerned with the linearized evolution equation for perturbations around axially symmetric stationary solutions, which have vacuum free boundaries. Results on the existence of solutions to the initial value problem, spectral properties of the generator operator, and stability/instability of solutions have been obtained.

研究分野：数学

キーワード：星の内部構造 Euler-Poisson方程式 軸対称計量 Einstein-Euler方程式 気体星の振動モード スペクトル解析 安定性

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

H30-R2 年度基盤研究(C)「宇宙物理学に現れる非線型双曲型偏微分方程式の解の構造」の継続、発展として、気体星の流体力学的内部構造の発展について、平衡解の近傍での非対称運動の解析を遂行することが研究課題となっていた。とくに回転する定常解を背景とする微小摂動の運動方程式を解析する必要があるになっていた。これが本研究の開始当初の背景である。

2. 研究の目的

(1) まず、非相対論(Newton力学)の枠組みの下で Euler-Poisson 方程式によって支配される気体星の内部構造の運動の解析について、球対称平衡解の背景からの摂動の線型解析を完成させることを研究目的とした。とりわけ念頭に置いたのは、最も基礎的な函数空間(背景の密度分布を重みとした二乗可積分摂動のヒルベルト空間)で考えたときに摂動の発展方程式の生成作用素が連続スペクトルをもつかどうかをはっきりさせることであった。このことは回転軸対称な背景からの摂動を静止球対称の背景での固有値からの分岐問題としてとらえようとするとき不可避の事案である。

(2) 上の事案は、地球のように自転する惑星の大気の運動の解析においても、本質的に同じ事案として現象するので、惑星大気の運動の解析を研究目的のひとつとした。すなわち、気体星の場合において自己重力に起因して生じる特性を分離して問題の数学的本質をあきらかにしようと試みた。

(3) 一般相対論の枠組みの下で Einstein-Euler 方程式によって支配される気体星の生成する時空計量の解析は引き続き研究目的であった。これは球対称のばあいにはほぼ満足のいく数学的に厳密な解析ができていたが、回転する軸対称計量の存在問題は一筋縄ではいかない。非相対論の場合や球対称の場合と異なり外部真空領域の計量と内部物質領域の計量とのマッチングが不明でないからである。この件の解析の続行も研究目的のひとつであった。

3. 研究の方法

本研究はまったく理論的なものなので、実験や数値シミュレーションは用いず、もっぱら所属大学図書館での先行研究や参考文献の閲覧、関連する研究を行っている国内・国外の研究者との研究討論、研究交流に依拠して、机上の試行錯誤をくりかえしながら研究を遂行した。

4. 研究成果

(1)(イ) Euler-Poisson 方程式の下での解析については、静止球対称の背景においてさえ、摂動の発展方程式の生成作用素のスペクトルに「本質スペクトル」の連続体が出現しうることがわかった。したがって、回転軸対称背景での問題を静止球対称背景での知見からの(微小回転角速度をパラメータとする)分岐問題としてあつかうのは数学的に厳密には慎重でなければならないことが明らかになった。(この成果はプレプリントに公表したが、引き続きさらに研究する。)(ロ) Euler-Poisson 方程式の解析において従来の数学的研究では、運動が等エントロピックで状態方程式がガンマ則になっていると仮定することが通常だが、必ずしもそうでない一般的な場合の検討をおこない、スペクトル問題、安定性問題についての知見を深めた。また、所謂「Cowling 近似」(摂動の運動の解析において自己重力の効果を捨象する)によって得られる知見を明らかにした。(これについてもに公表してある。)(ハ) Euler-Poisson 方程式の解析のうち、背景が球対称平衡解でバロトロピックであっても等エントロピックでない場合は、摂動の発展方程式の生成作用素が0に集積する固有値列をもちうることを明らかにした。すなわち、星震学、日震学に所謂「g-モード」の存在を数学的に厳密に証明したという成果があった。(この成果は論文に公刊された。)

(2) Euler 方程式の下での惑星大気の運動については、惑星とともに剛体回転する背景からの摂動の解析を遂行し、発展方程式の解の存在について最も基礎的なことは解決した。しかし、解の滑らかさについての解析をさらに進める必要がある。すなわち、この場合、背景の密度分布は初等函数を用いて陽に書き下せ、真空との自由境界(大気の「表面」あるいは「成層圏の限界高度」)は軸対称な代数的曲面となる(回転楕円面ではない)が、摂動の運動の解析においてこの自由境界をどう数学的に処理するかは、さらに考えるべき余地がある。(プレプリントに研究成果を公表してあるが、さらに研究を続ける。)

(3) Einstein-Euler 方程式の下での軸対称定常解の時空計量については、剛体回転の気体星に対して「漸近的に平坦な」外部真空計量と接続する内部計量の存在を数学的に厳密に証明することができた。(この成果は論文として公刊された。)

<引用文献>

T. Makino, Linearized analysis of adiabatic oscillations of rotating gaseous stars, arXiv:2309.00521, 14 Mar 2024.

T. Makino, On linear adiabatic perturbations of spherically symmetric gaseous stars

governed by the Euler-Poisson equations, *Kyoto J. Math.*, 63(2023), 353-420, March 14, 2023.

T. Makino, On the linearized evolution equations of atmospheric motions, arXiv:2206.06532, 20 Feb 2023.

T. Makino, On the axisymmetric metric generated by a rotating perfect fluid with the vacuum boundary, *Class. Quantum Grav.*, 38(2021), 134002, 8 June 2021.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

| | |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名 Tetu Makino | 4. 巻 63 |
| 2. 論文標題 On linear adiabatic perturbations of spherically symmetric gaseous stars governed by the Euler-Poisson equations | 5. 発行年 2023年 |
| 3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics | 6. 最初と最後の頁 353-420 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/21562261-10428494 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-------------------------------|
| 1. 著者名 Makino Tetu | 4. 巻 38 |
| 2. 論文標題 On the axisymmetric metric generated by a rotating perfect fluid with the vacuum boundary | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Classical and Quantum Gravity | 6. 最初と最後の頁 134002 - 134002 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1361-6382/abfed3 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

| |
|--------------------------------|
| 1. 発表者名 牧野 哲 |
| 2. 発表標題 回転する地球大気の運動方程式 |
| 3. 学会等名 日本数学会 2022年度秋季総合分科会 |
| 4. 発表年 2022年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|---------------------------|-----------------------|----|
|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|