

令和 6 年 4 月 26 日現在

機関番号：14101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2021～2023

課題番号：21K03324

研究課題名(和文) 弱零条件を満たす準線形波動方程式系の初期値問題に対する時間大域解

研究課題名(英文) Global solutions to the Cauchy problem for systems of quasi-linear wave equations satisfying the weak null condition

研究代表者

肥田野 久二男 (Hidano, Kunio)

三重大学・教育学部・教授

研究者番号：00285090

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円

研究成果の概要(和文)：空間3次元で標準的な零条件を満たさず、二つの波の伝播速度は同一であるが、もう一つの波の伝播速度がそれとは異なるような3成分の半線形波動方程式系の初期値問題を考察した。小さくなめらかな初期値に対して時間大域解が存在するための十分条件である零条件が破綻しているために時間減衰が遅い成分が混ざり、その成分とは伝播速度が異なる成分との相互作用における時間減衰の得の観測が至難の業となる。方程式系と初期値が球対称である場合に限るものの上述の相互作用を入れた系を考察して、小さくなめらかな球対称な初期値に対して、一意的な時間大域球対称解の存在を示した。空間1次元における関連する問題も考察した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

空間3次元における非線形波動方程式系の初期値問題が、小さくなめらかな初期値に対して時間大域解をもつための非線形項の形状に関する条件として知られる零条件は、あくまでも十分条件であり必要条件ではない。そこで、零条件が破綻しているものの、それでも小さくなめらかな初期値に対して時間大域解が存在するような非線形項にはどのようなものがあるのかを追求する方向で研究を進めてみた。

研究成果の概要(英文)：The Cauchy problem for a 2-speed and 3-component semi-linear system of wave equations has been studied in three space dimensions. The standard null condition, which is a sufficient condition for global existence of solutions with small data, is violated for the system, and hence a loss of time decay occurs in a certain component. We may reasonably expect that some gain of time decay will occur in the nonlinear interaction between such component and the other one with different propagation speed. In fact, it is technically quite difficult to observe such gain of time decay. At the cost of assuming radial symmetry of the equations and the data, we have succeeded in showing global existence of small, radial solutions for small, radial data. A certain related problem in one space dimension has been also studied.

研究分野：非線形偏微分方程式論

キーワード：非線形波動方程式 初期値問題 時間大域解 零条件

### 1. 研究開始当初の背景

伝播速度が等しい  $u$ ,  $v$  と伝播速度がこれらとは異なる  $w$  という三つの成分からなる半線形波動方程式系の初期値問題を空間 3 次元の場合に考察した. 本研究課題申請時までには, (a) 同一の伝播速度だけを持つ成分から成る系に対して, Klainerman の零条件が満たされるとき, なめらかで小さな初期値に対する時間大域解の一意存在がよく知られていて, (b) また, 伝播速度がすべて異なるような成分から成る系については, 横山条件が満たされているとき, なめらかで小さな初期値に対する時間大域解の一意存在が知られていた. 今回研究したのは, この(a)にも(b)にも該当しない場合であり, space-time resonance method を駆使した Pusateri-Shatah の先行結果があった. Klainerman の零条件が満たされない非線形項が含まれているために, 時間減衰の悪い成分が存在しており, それが解析を難しくして, 同時に問題を興味深く, 挑戦する意義があるものにしていく. Pusateri-Shatah が時間大域解の存在証明のために課した条件の一つが, 時間減衰の悪い成分は (取扱いが容易であろうと考えられる) 3 次以上の項にのみ含まれるということであった. 取扱いが難しくなると考えられる 2 次の項にそのような成分が含まれることを許容できるかどうかは未解決であった.

### 2. 研究の目的

上述の未解決課題に関しては, 本研究課題の研究代表者と分担者らにより, そのようなことが部分的には許容できるということは示されていた. 今回は, その部分的解答中に課されていた条件をもっと自然なものに緩めることを主な研究目的に設定した.

### 3. 研究の方法

(1) 方程式系と初期値が球対称 (したがって, 解も球対称) の場合には, 空間 1 次元の場合の議論が使用可能になる. この古典的な考察を今回のような方程式系に適用することを行った. 基本的には Sideris の 1983 年の論文で行われた, 重み付き  $\sup$  ノルムを使い, 積分方程式を逐次近似で解く方法を採用した. 球対称の場合には, 一般の場合に使われるエネルギー型のノルムが評価を閉じるのに不要になる. 議論が 1 次元的になるので,  $\sup$  ノルムで「微分の損失」が起こらないからである. 重み関数は伝播速度に依存しており, そのおかげで上述のような 2 次の非線形項には時間減衰の得が起きていることを観測できるはずである. この得が時間減衰の遅い成分に生じる減衰の損失分を上回ってくれるおかげで十分な時間減衰が得られて, 時間大域的に評価が閉じるはずだと見込んで研究を行った.

(2) 空間 3 次元で球対称の場合の考察は上述の通り, 議論があたかも空間 1 次元の場合のようになる. そこで, 空間 1 次元のときの関連する問題に応用することも考えた. この古典的な方法が, 空間 1 次元で非線形項が標準的な零条件を満たすような, 異なる伝播速度を持つ半線形波動方程式のシステムに対する初期値問題の時間大域解の存在の証明に有効であることを指摘した論文は, 研究開始当初の段階では, 意外なことに我々が知る限り皆無であった. そこで, この方法で研究を進めてみた.

### 4. 研究成果

(1) 零条件が満たされていないために, 時間減衰の悪い成分が混ざり, その成分とは伝播速度が異なる成分との非線形相互作用において, 伝播速度の違いから得られているはずの時間減衰の得をどのように観測するかが至難の業であり, 先行結果においてはそのような相互作用は除外されていたのであった. 今回, 方程式系と初期値が球対称で, よって解も球対称であるような場合に限るものの, 上述のような相互作用を入れた系を考察することに成功したのは新しい成果である. つまり, そのような非線形項が含まれている場合に, 小さくなめらかな球対称な初期値に対しては, 一意的な時間大域球対称解の存在を示すことが出来た. 今後の展望として二つ挙げる. まず, 得られた球対称解の 3 成分のうち, 挙動が自由解に近い振る舞いをする 2 成分に関しては, その各点評価からエネルギーは時間に関して非増加であることは導かれる. このことから, 本研究課題で得られた成果は球対称という条件がなくても同様の結果が成立すると期待している. 球対称という条件を外すことが大きな課題になる. 二つ目の展望・課題として, フーリエ変換してから解析を行う Pusateri-Shatah の space-time resonance method によって, 彼らが示していた先行結果をどこまで改善・最適化できるのかを調べることを挙げる. 私たちが以前に彼らの結果を改善・一般化した際の手法や今回の手法は, フーリエ変換とは基本的には無関係であり, 彼らの手法とは全く異なる. 彼らの方法でも実は同様の結果を得ることが出来るかもしれないと考えている. その方面の探究はフーリエ解析と密接に関連しているはずで, 大変に意義があり, 興味深いと思われる.

(2)空間1次元の場合の半線形波動方程式の特殊性として、エネルギー評価を使わないで、各点評価のみで逐次近似の評価が閉じる。この著しい利点がある一方で、空間1次元で非線形項が標準的な零条件を満たすような、異なる伝播速度を持つ半線形波動方程式系に対する初期値問題の時間大域解の存在の証明に、この古典的な手法が有効であることを指摘した論文は、意外なことに皆無であった。そこで、この方向で研究を進めてみた。空間次元が2以上の場合とは異なり、空間1次元の場合は、解やその導関数の空間変数に関する sup ノルムが時間変数に関して減衰することはないが、標準的な零条件のもとで非線形項は良い減衰を示す。このことを計算で確かめることが研究の主な内容になった。そして、この非線形項の時間変数に関する減衰を利用して、遠方で可積分になるほどに減衰する小さな初期値に対して、時間大域解の存在を示すことに成功した。特に全ての成分の伝播速度が同一の場合の結果は、Lu Li と Yang と Yu が重み付きのエネルギー型評価式を導出して、それを用いて示した時間大域解の存在定理の別証明を、各点評価の方法で与えたことに相当する。また、1981年の未出版論文において Tartar が、1乗可積分ルベーク空間(これは考察している半線形方程式系に対する自然な尺度変換の下でノルムが尺度不変なる空間)の枠組みで、小さな初期値に対する時間大域解の存在を証明したことを Bianchini と Staffilani が arXiv 論文で指摘したわけであったが、私たちの今回の研究は別のアプローチを与えたことにも相当する。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 0件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Kunio Hidano	4. 巻 185
2. 論文標題 D'Alembert formula approach to semi-linear systems of wave equations with or without the null condition	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of 48th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, Hokkaido University technical report series in Mathematics, 185	6. 最初と最後の頁 111-123
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14943/108104	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 1件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 肥田野 久二男
2. 発表標題 Global existence for 1-d semi-linear, multiple-speed systems of wave equations with the null condition
3. 学会等名 松本偏微分方程式研究集会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 肥田野 久二男, 横山 和義
2. 発表標題 Global existence for a 2-speed and 3-component semilinear system of wave equations in 3D
3. 学会等名 日本数学会 2024年度年会（2024年3月開催）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 肥田野 久二男
2. 発表標題 Point-wise estimation approach to the 1-d semi-linear wave equation with the null condition
3. 学会等名 駿河台偏微分方程式研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 横山 和義
2. 発表標題 Global existence and blow up for systems of nonlinear wave equations related to the weak null conditions
3. 学会等名 The 18th Linear and Nonlinear Waves (招待講演)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	横山 和義  (Yokoyama Kazuyoshi)  (20316243)	北海道科学大学・工学部・教授    (30108)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------