様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　５ 月 ２９ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2021～2023
課題番号：２１Ｋ０３３３５

研究課題名（和文）和算で扱われた計算幾何学問題に対する記号的消去計算アルゴリズムの現代化の研究

研究課題名（英文）Research on the modernization of symbolic elimination algorithms for computational geometry problems raised in Wasan

研究代表者
森継　修一（Moritsugu, Shuichi）

筑波大学・図書館情報メディア系・教授

研究者番号：５０２２００７５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　1,600,000円

研究成果の概要（和文）：和算（江戸時代に日本で独自に発展した数学）で取り上げられた問題の中から、幾何学の計算問題を対象として、現代的な消去計算アルゴリズムとの関連を研究した。その結果、「円に内接する多角形における各種の量（面積・半径・面積と半径の積）がみたす方程式」をいくつか具体的に導くことに成功した。これらの中には、「世界で他に誰も持っていない公式」も含まれ、きわめて独自性の高い研究成果である。

研究成果の学術的意義や社会的意義
従来、和算研究は数学史研究の一分野に位置づけられ、未発見資料の探索や文献解釈を基本として行われてきた。これに対して本研究は、数学史研究に情報科学の手法を取り入れ、デジタル・ヒューマニティーズ（人文情報学）の視点から和算を取り上げたものである。さらに、実際に開発された計算手法は、現代の数式処理研究としても有効であり、新たな学際的研究分野を開拓した点に、本研究の学術的・社会的意義があると考える。

研究成果の概要（英文）：Among the problems raised in Wasan (mathematics developed independently in Japan during the Edo period), we focused on geometric calculation problems and researched their relationship with modern elimination calculation algorithms. As a result, we succeeded in deriving several concrete equations that are satisfied by various quantities (area, circumradius, and product of area and circumradius) in polygons inscribed in a circle. These include ``formulae that no one else in the world has,'' and are extremely unique research results.

研究分野：情報科学

キーワード：計算幾何学　数式処理　消去計算アルゴリズム　和算

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

１．研究開始当初の背景

和算とは、主に江戸時代の日本で独自に発達した数学であり、分野によっては現代の数学にも通じる成果を残した数学者や著作も多数存在する。特に、寺社に奉納された多数の「算額」によって、その水準の高さが国内外で注目を集めるようになってきている。

これらの資料については、従来の数学史研究の立場から文献解釈に基づく研究が積み重ねられてきているが、本研究では、ここに情報科学の手法を取り入れ、現代のコンピュータによる数式処理を用いた計算の実行や公式の検証に取り組むことを目指すものである。

本研究課題で主として取り上げた問題は、円内接多角形に関する種々の公式の検証と導出である。和算における起源は、池田昌意「数学乗除往来(1674)」遺題第３問にあり、「各辺の長さが与えられた五角形に外接する、円の直径を求める」問題である。これに対して、井関知辰「算法発揮(1690)」第７問では、下図に基づく消去計算により、「直径に関する 14 次方程式」を得ている。

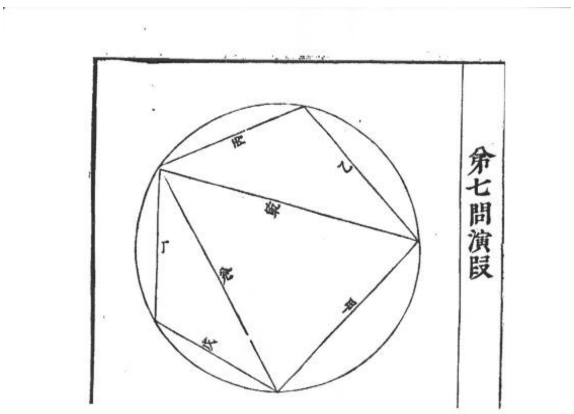

図１　井関知辰「算法発揮」(1690)

本研究の端緒は、この井関の結果の検証から始まり(2010 年ころ)、現代数学で「終結式を用いた消去計算」と呼ばれる手法が、和算の世界で完全に確立していたことを明らかにした。この結果に基づき、内接する多角形を五角形から八角形まで変化させたときに、円の直径（半径）・多角形の面積・半径と面積の積などの諸量の間にどのような関係式が成り立っているのか、具体的に導出することが課題として浮上した。そのために必要な消去計算のアルゴリズムの効率化は、現代のコンピュータサイエンスにとっても重要な課題であった。

２．研究の目的

当初の研究目的は、和算の結果の検証にあった。特に、大規模な計算を伴う問題については、実際に計算されたことがないものも多く、文献解釈を中心とする数学史研究に情報科学の手法を取り入れること自体に意義があった。結果として、「和算家が想定していなかった別解の存在」が発見された例などもあり、数式処理を適用して和算研究を発展させることが、より高い目標となった。

一方、計算機実験を進めていくうちに、現代の数式処理において標準的とされている計算手法だけでは実行できないサイズの問題も現れ、消去計算アルゴリズム自体の効率化も課題となってきた。したがって、和算家が取り上げたものよりも複雑な問題を実際に解くため、現代数学として数式処理アルゴリズムの効率化も主要な研究目的となった。

３．研究の方法

取り上げた図形上の関係を現代の数学の記法で表現し、主として多項式方程式の形で表す。それをもとに、数式処理システム上でプログラミングと計算機実験を行う。例えば、図 2 のような円内接五角形の場合、各辺長・半径・面積を表す変数を与え、三角形に対する Heron の公式のような基本関係式から、変数の間に成り立つ式を順次記述していく。

以下において、各変数の意味は

$a_1, a_2, \dots, a_n$ ： n角形の各辺の長さ

S ： n角形の面積。
R ： 外接円の半径
となっている。

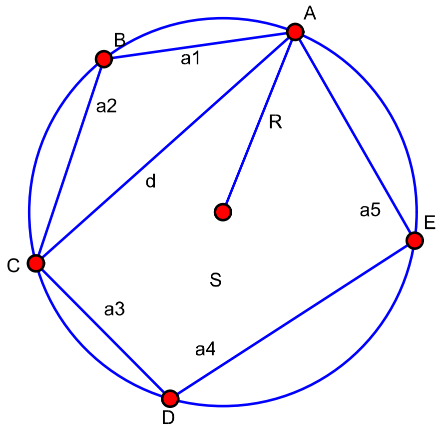

図２　円内接多角形問題　(n = 5)

計算機実験は以下の 2 台のワークステーションを活用して行った。

1. Lenovo ThinkStation D20 (Windows, 192GB)
2. アプライド社 CERVO-Grasta Type E2 (Linux, 256GB)

前者については、老朽化による不調が目立ってきたため、本科研費により
Lenovo ThinkStation P520 (Windows, 256GB)
を新規に購入し、Windows 環境を更新した。主として使用した数式処理システムは Maple2021, 2022 である。上記２台のワークステーションに対して、Maple の Windows 版と Linux 版をそれぞれインストールし、動作や性能の違いを観測しながら実験を行った。

４．研究成果

関連する公式を一覧にすると表１のようになる。この中には、「最初の計算者」だけでなく、アルゴリズムの異なる研究成果を複数挙げてある。計算対象は、以下の 3 種類に分類される。

- 面積公式: $X = (4S)^2$を主変数とする多項式
- 半径公式: $Y = R^2$を主変数とする多項式
- "面積×半径"公式: $z = 4SR$ または $Z = (4SR)^2$ を主変数とする多項式
  ただし、zに関する多項式は、nが奇数のときのみ存在する。（これは本研究の中で初めて明らかにされた事実で、他の研究者からの言及は見当たらない。）

いずれも、各多項式は、n = 5,6のときは7次、n = 7,8のときは38次式になることが知られている。また、辺長$a_1, \dots, a_n$そのままではなく、以下に示すような、それらの2乗の間の基本対称式表現を用いると、簡潔に表されることも分かっている。

$$s_1 = a_1^2 + \cdots + a_n^2$$
$$\cdots\cdots$$
$$s_n = a_1^2 \cdots a_n^2$$

研究課題期間以前の 2020 年度までは、主に「半径公式」の計算法に取り組んできたため、円内接八角形(n = 8)の場合の成果(2019)は、世界唯一のものとなっている。

2021～2023 年の研究課題期間においては、n = 7,8の場合の「"面積×半径"公式」の計算法の開発に取り組み、主として円内接七角形に関する２つの成果を得ることができた。目標とする公式は、

$$\varphi(z) = z^{38} - 8s_3z^{36} + \cdots + C_1(s_i)z + C_0(s_i)$$

という形の 31,590 項の多項式である。 $Z = (4SR)^2$ を主変数とする多項式については、

$$\Psi(Z) = -\varphi(z)\varphi(-z)$$

という関係があるので、七角形の場合は、$z = 4SR$についての関係式のみ求めれば十分である。

(1) 未定係数法に基づく数値補間による計算法

$\varphi(z)$ における各係数$C_j(s_i)$は、ある条件をみたす「同次式」になっていることが想定されるので、存在する可能性がある単項式を絞り込むことができ、未定計数法に基づく数値補間が適用可能である。これにより、問題は「整数上の連立一次方程式の解法に帰着される。実行してみると、最大で 26,226 元の連立一次方程式を解く必要があり、計算に要した CPU 時間の合計は、約 17 日であった。「31,590 項になる」という報告はすでに存在していたが、実際の式の形やアルゴリズムの詳細を論じた文献は他に存在しないため、新規性のある成果として、2022 年に日本数式処理学会誌に英文論文が採択された。

(2) 複素平面上の対称式の利用による計算法

円内接多角形は、「複素平面上に、原点を中心とする半径Rの円を描き、その円周上にn個の点$v_1, \cdots, v_n$を取ったもの」として定式化できる。「面積公式」の計算法を扱った Robbins($n = 5,6$) (1994)、Maley 他($n = 7,8$) (2005)はこの方法に基礎をおいているので、本研究における『“面積×半径”公式」の計算でも検討する必要がある。実際に式を立てて計算してみると、$n = 7$の場合の$\varphi(z)$（31,590 項）が終結式による消去計算と因数分解による正しい因子の選別により計算可能になった。その際の CPU 時間は計 3 時間ほどであり、数値補間による場合の 17 日からは大幅な短縮に成功している。この結果は、2023 年 12 月の研究会において口頭発表で報告した。

表１　各公式の計算状況

n	面積公式	半径公式	“面積×半径”公式
3	Heron (1C)	Heron (1C)	Heron (1C)
4	Brahmagupta (628)	Brahmagupta (628)	Brahmagupta (628)
5	Robbins(1994) Pech(2006) Moritsugu(2015)	建部賢弘(1683) 井関知辰(1690) Robbins(1994) Pech(2006)	Moritsugu(2014) Moritsugu(2015)
6	Robbins(1994) Moritsugu(2015)	Moritsugu(2011)	Moritsugu(2015)
7	Maley et al.(2005)	Moritsugu(2011,8)	Moritsugu(2022,3)
8	Maley et al.(2005)	Moritsugu(2018,9)	Moritsugu(未解決)

以上、本研究の主要な成果である「円内接七角形に対する“面積×半径”公式は、表中の網掛け部分に相当する。

今後の課題としては、この表の中で唯一の未解決問題「円内接八角形における“面積×半径”公式」である。これも、$Z = (4SR)^2$に関する 38 次多項式になることは分かっているが、数値補間で求められるのは、項数の少ない係数部分だけとなっている。未計算の部分は、式のサイズが大きくなりすぎるため、数値補間でも、終結式による直接的な消去計算でも、現行の計算環境では実行が困難である。これらの手法以外に、新しい原理に基づく計算法が存在しないか、今後とも探求を続けたいと考える。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　2件）

１．著者名 森継修一	４．巻 2224
２．論文標題 Svrtanによるnew Brahmagupta's formulaの円内接多角形問題への適用について	５．発行年 2022年
３．雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	６．最初と最後の頁 103-113
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Shuichi Moritsugu	４．巻 28(1)
２．論文標題 Computing the Integrated Circumradius and Area Formula for Cyclic Heptagon by Numerical Interpolation	５．発行年 2022年
３．雑誌名 日本数式処理学会誌	６．最初と最後の頁 3-13
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 森継修一	４．巻 2185
２．論文標題 円内接七・八角形の「面積×半径」公式の計算について	５．発行年 2021年
３．雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	６．最初と最後の頁 94-103
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計2件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 森継 修一
２．発表標題 円内接多角形問題について -複素平面上の対称式の利用-
３．学会等名 RIMS共同研究（公開型）Computer Algebra - Foundations and its Applications
４．発表年 2023年

1．発表者名 森継 修一
2．発表標題 Svrtanによるnew Brahmagupta's formula の円内接多角形問題への適用について
3．学会等名 RIMS共同研究(公開型) Computer Algebra - Theory and its Applications
4．発表年 2021年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関