

令和 6 年 6 月 18 日現在

機関番号：35403

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2021～2023

課題番号：21K03344

研究課題名(和文) 整化可能な代数構造の代数的グラフ理論による特徴付け及び分類

研究課題名(英文) Characterization and classification of integrable algebraic structures by algebraic graph theory.

研究代表者

谷口 哲至 (Taniguchi, Tetsuji)

広島工業大学・工学部・准教授

研究者番号：90543728

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：グラフの空間埋込から得られる情報で、格子の生成系を与える。そこに最小固有値を関連付けることで、 n -格子(最小固有値が $(-n)$ 以上のグラフから得られる)の概念が生まれる。本研究では、最小固有値が -3 以上のグラフから得られる3-格子と呼ばれる特殊な構造に関する未解決問題に取り組む。この問題は、グラフ理論における基礎的な概念である固有値と、複雑な構造を持つ3-格子を結びつけるもので、その関連性を解明することは、グラフ理論、格子理論、符号理論の発展に大きく貢献すると考えられる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、グラフ理論における固有値と、複雑な構造を持つ3-格子(Root格子の一般化)の関係性を解明しようとするものである。この関連性の解明は、グラフ理論、格子理論、符号理論の発展に大きく貢献すると考えられる。特に、整格子は符号理論において誤り訂正符号の構成に利用されるなど、情報通信技術の発展に寄与する可能性がある。また、グラフ理論や格子理論は情報理論、物質科学、符号・暗号理論など、幅広い分野に応用されており、本研究の成果はこれらの分野にも波及効果をもたらすと期待される。

研究成果の概要(英文)：The information obtained from the embedding of a graph gives the generators of the lattice. Associating the smallest eigenvalue to it gives rise to the notion of an n -lattice (obtained from graphs with smallest eigenvalue greater than or equal to $-n$). In this study, we address an open problem concerning a special structure called the 3-lattice, which is obtained from graphs with smallest eigenvalue greater than or equal to -3 . This problem connects eigenvalues, a fundamental concept in graph theory, with the complex structure of 3-lattices, and elucidating the connection between the two will greatly contribute to the development of graph theory, lattice theory, and code theory.

研究分野：代数的グラフ理論

キーワード：代数的グラフ理論 スペクトラルグラフ理論 代数的組合せ論

1. 研究開始当初の背景

【一般的な背景】

グラフの頂点数が増すと組合せ爆発が起こり、グラフの構造を詳細に知るのは困難になる。そのため、グラフの隣接行列、ラプラシアン行列などのスペクトルを調べ、グラフの構造を研究する。それがスペクトラルグラフ理論である。一方、代数的グラフ理論では線形代数の他、群・環・体の理論を用いてグラフの決定・特徴付け・分類を行う。この意味で、スペクトラルグラフ理論は代数的グラフ理論の一分野と捉えられるが、近年の応用研究の拡大により、離散構造上の解析学(確率論、量子ウォークなど)と絡み、代数的グラフ理論の範囲を超えた発展がみられる。一方、格子の元同士の内積が全て整数の整格子(integral lattice)をスカラー \sqrt{s} 倍して、標準格子(standard lattice)の部分格子とする整化を考える代数的組合せ論の領域がある。それを s -整化可能(s -integrable)といい、その構造も興味の対象である。

【ホフマングラフ：申請者のこれまでの研究】

ルート格子の分類と最小固有値 ≥ -2 のグラフの分類における対応の構図はよく知られている。さらに、グラフ理論の言葉で例外型ルート格子を特徴付ける禁止構造の決定が成されている。それらの成果から、そのクラスのグラフの隣接行列 A (成分が $0, 1$ という整数) は、接続行列 D によって $A = D^{-1}TD - 2I$ と記述でき、これに起因する分解理論の存在が大きい。次に、最小固有値 < -2 のグラフによる整格子の特徴付けを可能にするクラスが導入される。Woo 氏、Neumaier 氏らの導入したホフマングラフである。

ホフマングラフは slim 頂点, fat 頂点の二種類の頂点から成るグラフで, slim 頂点の隣接行列 A と slim 頂点-fat 頂点の接続関係を表す行列 C を用いた $A - CC^T$ のスペクトルを調べる領域である。このクラスはグラフの最小固有値による極限構造でありながら、グラフの自明な分解(連結成分)ではなく、線形空間(特に整格子)の意味のある分解を与える大変興味深い構造である。これにより、最小固有値 < -2 のグラフと整格子に対応付け可能であり、これまで特徴付け困難であった構造について、グラフの既約性を用いた研究が可能になった。研究生活の中で長年携わってきた対象である。

2. 研究の目的

ルート格子の分類と最小固有値 ≥ -2 のグラフの分類における対応の構図はよく知られている。次に、最小固有値 < -2 のグラフによる整格子の特徴付けを可能にするクラスが導入される。Woo 氏、Neumaier 氏らの導入したホフマングラフである。このクラスはグラフの最小固有値による極限構造でありながら、グラフの自明な分解(連結成分)ではなく、線形空間(特に整格子)の意味のある分解を与える大変興味深い構造である。これにより、最小固有値 < -2 のグラフと整格子に対応付け可能であり、これまで特徴付け困難であった構造について、グラフの既約性を用いた研究が可能になった。これにより、グラフにも整化性を問えることが可能になり、これを用いて整格子の分類に挑む。

3. 研究の方法

一般化ホフマングラフについて分解理論を構築し、それを用いたグラフの決定・特徴付け・分類・指標評価の研究を通し、整化可能整格子の決定・特徴付け・分類を行う。一般化ホフマングラフは申請者が最も理解している。方向性の決定や舵取りは申請者が行い、課題に挑む。また、学生時代から長年関わっているが、その有用性について十分な宣伝が出来ていない。ホフマングラフの周知は申請者の重大な任務である。本研究では重要案件として扱う。【研究分担者(宗政氏)の具体的役割】ただ新しい結果を残すのでは、代数的グラフ理論・スペクトラルグラフ理論領域の裾野拡大は成し遂げられない。代数的組合せ論の観点から、波及効果も考慮し、申請者と共に一般論を展開する。更に、代数的グラフ理論・スペクトラルグラフ理論において一般化ホフマングラフによる離散構造の分解理論の成熟度を高め、広報する。

【研究が当初の予定通りに進まない時の対応】

瀬川氏(量子ウォーク)との共同研究で、有向辺と無向辺を持つグラフから、あるエルミート行列を構成し、その行列の固有値について調べた。有向辺を持つとき、その行列成分に $\exp(\pi i \eta)$ がある。有理数として η を変化させたが、スペクトルに大変興味深い現象が生じた。計算は困難となるが、 η を無理数とすれば、スペクトルが一致する非同型な有向辺を持つグラフの組が劇的に減ると予想される。これについて調べる。

【令和3年度の研究計画】整化可能整格子の一般化ホフマングラフによる特徴付けをする。ある整格子の拡大で、従来のホフマングラフで表せない整化可能整格子のクラスが幾つかある。そのクラスを列挙し一般化ホフマングラフで特徴付けを目指す。また、Mohar 氏らによる有向グラフのエルミート隣接行列の研究がある。一般化ホフマングラフを用い、有向グラフ上のセゲディー

型量子ウォークにおける遷移行列の型, 及び周期的グラフを決定する。そして, ホフマングラフについて周知を図る為に説明サイトの作成を開始する。

【令和4年度以降の研究計画】ある正の実数 s に対し, 最小固有値 $\geq -s$ で制限した時, 全てのグラフが 2-整化可能であると予想している。この研究について着手し, 本研究期間中での解明を目指す。また, 整格子と関連の深い強正則グラフ, 距離正則グラフの分解に(一般化)ホフマングラフが利用できる。分解の様子を調べ, (一般化)ホフマングラフを用いた構成法を見つける。また, 量子ウォークにおいて周期的な有向グラフや辺符号グラフの構成法は知られていない。一般化ホフマングラフの分解理論を用い, 周期的グラフを構成・決定し, 量子探索の新技法を開発する。

4. 研究成果

グラフの最小固有値と整格子構造の関係に着目し, 特に最小固有値が-3以下のグラフから得られる 3-格子と呼ばれる特殊な構造の未解決問題に取り組んだ。従来, 3-格子は複雑な構造ゆえ解析が困難であったが, 本研究では特定の 3-格子構造において, あるデザインが関与していることを発見した。この発見は, グラフ理論における基礎的な概念である固有値と複雑な格子構造を結びつけるものであり, グラフ理論, 格子理論, 符号理論の発展に寄与するものである。

本研究は, グラフ理論における固有値問題と格子理論における構造問題を融合させる新たな視点をもたらす。特に, 3-格子とデザインの関連性の発見は, これまで独立に発展してきた両分野の橋渡しとなる可能性を秘めている。この成果は, グラフ理論, 格子理論, 符号理論の発展に貢献するだけでなく, 符号理論における誤り訂正符号の構成など, 情報通信技術の発展にも寄与することが期待され, 大変意義のある研究である。

今後の展望として, 発見したデザインと 3-格子の関係性について, さらなる詳細な分析を進める。具体的には, デザイン理論における既存の研究成果を活用し, 3-格子の構造をより深く理解することを目指す。また, この研究成果を基に, グラフ理論, 格子理論, 符号理論における新たな研究課題を提起し, これらの分野の発展に貢献していく。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 5件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 谷口哲至
2. 発表標題 グラフの固有値とライングラフの一般化 ~ グラフに意味のある分解を与えてみよう ~
3. 学会等名 日本数学会 2022 年度年会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 谷口哲至
2. 発表標題 整化可能な整格子
3. 学会等名 代数的組合せ論シンポジウム
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 谷口哲至
2. 発表標題 グラフの固有値とライングラフの一般化
3. 学会等名 日本数学会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Tetsuji Taniguchi
2. 発表標題 Hoffman graphs and Integral lattices
3. 学会等名 the 10th Slovenian Conference on Graph (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 谷口哲至
2. 発表標題 辺符号グラフのライングラフとその最小固有値による表現
3. 学会等名 早稲田大学(談話会) (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 谷口哲至
2. 発表標題 辺符号グラフのライングラフとその最小固有値による表現
3. 学会等名 近畿大学(談話会) (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Tetsuji Taniguchi
2. 発表標題 Hoffman Graph
3. 学会等名 Catch-all Mathematical Colloquium of Japan (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

審査中: Michitaka Furuya, Sho Kubota, Tetsuji Taniguchi, and Kiyoto Yoshino: The uniqueness of covers of widely generalized line graphs
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	宗政 昭弘 (Munemasa Akihiro) (50219862)	東北大学・情報科学研究科・教授 (11301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関