

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：12301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2021～2023

課題番号：21K03346

研究課題名（和文）強結合超伝導におけるエリアシュベルグ方程式の作用素論的研究

研究課題名（英文）Operator-theoretical study of the Eliashberg equation in strong-coupling superconductivity

研究代表者

渡辺 秀司（Watanabe, Shuji）

群馬大学・大学院理工学府・教授

研究者番号：90222405

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,200,000円

研究成果の概要（和文）：超伝導におけるエリアシュベルグ方程式を解くことは極めて強く切望されています。そこで、電子・フォノン間の結合定数が非常に小さい場合について、エリアシュベルグ方程式のポテンシャルに対して適切な条件を発見しました。バナハ空間とその部分集合を適切に設定して不動点定理を応用し、電子・フォノン間の結合定数が非常に小さい場合におけるエリアシュベルグ方程式の解の存在と一意性に関する数学作用素論的な証明を与えました。さらに、解の温度についての連続性や偏微分可能性、温度についての予想されていた性質も導き出すことができました。また外部磁場が存在する場合についても証明できました。

研究成果の学術的意義や社会的意義

エリアシュベルグ方程式を解くことは超伝導の理論的研究において極めて強く切望されているにもかかわらず、連立の非線形積分方程式であるため、数値解析的な研究は活発に行われていますが、解析的にほとんど解けておらず、解析的な研究はあまり進展していませんでした。このような状況下において、電子・フォノン間の結合定数が非常に小さい場合について、エリアシュベルグ方程式のポテンシャルに適切な条件を課し、バナハ空間とその部分集合を適切に設定して非線形積分作用素に対して不動点定理を応用しました。その結果、解の存在と一意性、解の温度についての連続性や偏微分可能性等を数学作用素論的に示すことができました。

研究成果の概要（英文）：It is highly desirable to solve the Eliashberg equation in superconductivity from the viewpoint of operator theory. We dealt with the case where the coupling between an electron and a phonon is small enough, and found out a suitable condition on the potential in the Eliashberg equation. We apply fixed-point theorems to the nonlinear integral operator defined on a suitable set of our Banach space, and gave an operator-theoretical proof for the existence and uniqueness of the solution to the Eliashberg equation under the condition above. Moreover, we showed the continuity and smoothness of the solution with respect to the temperature. Furthermore, we showed the existence, uniqueness, continuity and smoothness of the solution when the constant external magnetic field is applied in the case where the coupling between an electron and a phonon is small enough.

研究分野：作用素論的手法の応用数学分野への応用

キーワード：超伝導 エリアシュベルグ方程式 解の存在と一意性 解の温度や外部磁場についての性質 外部磁場

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

超伝導におけるエリアシュベルグ方程式は連立の非線形積分方程式であるため解を求めることは極めて困難です。このため、数値解析的には活発に研究されていますが、解析的にはほとんど解けておらず解析的な研究はほとんど進展していません。エリアシュベルグ方程式の解明は、強結合超伝導の理論的研究において極めて強く切望されているにもかかわらず、未だにできておりません。連立の非線形積分方程式であるエリアシュベルグ方程式を解析的に調べて、解の存在と解がただ一つだけ存在すること(解の一意性)を示し、また解が温度などの連続な関数であることや偏微分可能な関数であることを解析的に証明することは全く出来ておりません。このように、「エリアシュベルグ方程式の解の存在や一意性、解の温度などについての滑らかさ等の性質を解析的に示せるか?」ということが強結合超伝導の研究における大きな問題点になっています。

## 2. 研究の目的

強結合超伝導の理論的研究において解明が極めて強く切望されているエリアシュベルグ方程式の解の存在や一意性、解の温度などについての滑らかさ等の性質を作用素論的に示すことが本研究の目的です。

エリアシュベルグ方程式は連立の非線形積分方程式であるため、解析的にはほとんど解けていません。このため、理論的な研究はあまり進展していません。したがって、エリアシュベルグ方程式の解の存在や一意性、解の温度などについての滑らかさ等の性質を示すことは、強結合超伝導の理論的研究において極めて重要です。本研究によってエリアシュベルグ方程式の解が得られれば、エネルギーギャップと呼ばれる物理量が温度とともにどのように変化するかが解明できます。さらに電子・フォノン間の結合定数と転移温度との関係式をエリアシュベルグ方程式から厳密に導出できます。このようにして、エリアシュベルグ方程式の解の存在や一意性、解の温度などについての滑らかさ等の性質を示して、超伝導の理論的研究に寄与することを目指します。

## 3. 研究の方法

連立の非線形積分方程式であるエリアシュベルグ方程式に不動点定理を応用して、解の存在や一意性、解の温度などについての滑らかさ等の性質を導きますが、その際、解が属するであろうと期待される適切なバナハ空間と、解が温度やその他の物理量についてもつであろうと期待される性質を盛り込んだ適切な部分集合を慎重に選びます。次に、エリアシュベルグ方程式に登場するポテンシャルに対して適切な条件を発見してそれを課す必要があります。バナハ空間の位相について、上の部分集合が相対コンパクトであることを最初に示す必要があります。特に、この部分集合がバナハ空間の位相について同程度連続な族であることを証明することが重要であり、急所であると考えています。これまでの研究上の経験を生かして慎重に証明しようと考えています。必要に応じて、バナハ空間を変更して異なる位相に関して証明を行うことも予測しています。

この後、コンパクトなこの部分集合の閉包で定義された、エリアシュベルグ方程式から定

まる積分作用素に対してシャウダーの不動点定理を応用して上記の証明を行います。

次に、一定の外部磁場が存在する場合について調べます。外部磁場が存在する場合はエリアシュベルグ方程式の解が、温度のほかに外部磁場にも依存しますのでより複雑になります。そのため、エリアシュベルグ方程式に登場するポテンシャルと、状態密度と呼ばれるものの積が正の定数と仮定して研究を進めます。この積が波数ベクトルの関数のときは後で作用素論を駆使して調べますが、今は積が正の定数ですので、これまでの研究上の経験から判断して陰関数定理を適用すれば証明が可能と予測しています。

#### 4. 研究成果

まずは、電子・フォノン間の結合定数が非常に小さい場合を扱いました。解が属するであろうと期待される適切なバナハ空間と、解が温度などについてもつであろうと期待される滑らかさ等の性質を盛り込んだ適切な部分集合を定義して、エリアシュベルグ方程式に登場するポテンシャルに対して適切な条件を発見して課しました。その結果、この部分集合がバナハ空間の位相について同程度連続な族であることを示して、その閉包がコンパクト集合であることを証明できました。

次に、コンパクトなこの部分集合の閉包で定義されたエリアシュベルグ方程式から定まる非線形積分方程式にシャウダーの不動点定理を応用して、解の存在と一意性を数学作用素論的に示すことができました。さらに、解の温度などについての連続性や偏微分可能性、また温度についての予想されていなかった性質をも導き出すことができました。

さらに、一定の外部磁場が存在する場合について、次に調べました。エリアシュベルグ方程式に登場するポテンシャルと状態密度と呼ばれるものの積が正の定数と仮定して陰関数定理を適用しました。その結果、エリアシュベルグ方程式の解の存在、一意性、解の温度や外部磁場についての連続性や偏微分可能性を示しました。さらに、解が温度や外部磁場について単調減少することも証明できました。外部磁場が存在する場合についての上述の研究成果は、現在のところ論文に纏めて投稿中です。

ポテンシャルと状態密度と呼ばれるものの積が正の定数であることを仮定して、上記のように証明を行いましたが、この積が正の定数ではなくて波数ベクトルの関数の場合につきましては、実は既に作用素論による証明が完成しつつあります。完成致しましたら、この研究成果を論文として纏めて、専門の学術誌に投稿する予定です。

以上の研究成果を複数の論文として纏めて、査読を受けた上で専門の学術誌で発表しました。さらに、物性物理学の国際会議で招待講演を行いました。また、日本数学会においても研究成果を複数回ご報告致しました。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Shuji Watanabe	4. 巻 12
2. 論文標題 Another operator-theoretical proof for the second-order phase transition in the BCS-Bogoliubov model of superconductivity	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Scientific Reports	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1038/s41598-022-11652-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Shuji Watanabe	4. 巻 11
2. 論文標題 An operator-theoretical study on the BCS-Bogoliubov model of superconductivity near absolute zero temperature	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Scientific Reports	6. 最初と最後の頁 15983
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1038/s41598-021-95322-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 1件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Shuji Watanabe
2. 発表標題 The second-order phase transition in the BCS-Bogoliubov model of superconductivity and its operator-theoretical proof
3. 学会等名 International Meet on Condensed Matter Physics 2022（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 渡辺秀司
2. 発表標題 超伝導のBCSギャップ方程式の新たな作用素論的扱いと2次相転移への応用
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 渡辺秀司
2. 発表標題 超伝導のBCS-Bogoliubovモデルにおける絶対零度近傍での臨界磁場の作用素論的研究
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------