

令和 6 年 6 月 23 日現在

機関番号：26402

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2021～2023

課題番号：21K03409

研究課題名(和文) 一次元ボーズ・アインシュタイン凝縮制御の物理と数理

研究課題名(英文) Mathematical physics of one-dimensional Bose-Einstein condensate control

研究代表者

全 卓樹 (Zen, Takuju)

高知工科大学・理工学群・教授

研究者番号：60227353

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：ボーズ・アインシュタイン凝縮体の制御法を確立するための研究を目指し、準備段階として複数エージェントが二次元格子グリッド空間をいかに埋め尽くすかの数値シミュレーション研究を行った。同種エージェント間引力と異種エージェント間斥力を仮定して2パラメータ・モデルが得られる。異種間斥力と同種間引力が弱い時の異種混在パターンが、引力が強まったとき同種エージェント液滴状集結へと自然に移行することが分かった。異種斥力が強い場合、エージェント密度を制御パラメータとして、不定形の境界線で区分された棲み分けパターンへの2次相転移、およびカオス的な不安定状態への一次相転移が観測された。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、巨視的なスケールで得意な量子の性質を示すことが予想される、複数元素からなるボーズ・アインシュタイン凝縮の状態制御の、簡単ではあるが十分に現実的な理論的モデルを提供する。そこに見出された異種混在状態と同種液滴状集結状態、また異種分離状態の間の相転移、また不安定なカオス状態の出現は、数理生態学的また社会物理学の設定での二種のアクティブ・エージェントの混住及び分離の多彩なパターンの出現と数学的に同等であって、これは分野を超えた全く異なった対象で同じ動力学が実現される例としても興味深いであろう。

研究成果の概要(英文)：In order to control of the Bose-Einstein condensates, as a preliminary study, we examined the multi-agent model of aggregation and separation on two-dimensional lattice grid space, using numerical simulations. Assuming the existence of attraction between homogeneous agents and repulsion between heterogeneous agents, 2-parameter model. We observe that the mixed habitation pattern of heterogeneous agents, seen in the case of weak repulsion and attraction, transitions to droplet-like aggregation of homogeneous agents, if the attraction is strong. Also, when the repulsion between heterogeneous agents is strong, as the agent density is changed as a control parameter, we find that the mixed pattern changes to a "habitat separation" pattern with amorphous boundary through a second-order phase transition. Furthermore, when the repulsion is very strong, we observe a first-order phase transition to a "chaotic unstable state."

研究分野：量子力学、数理物理学、社会物理学

キーワード：異種混合系 相転移 量子力学 社会物理学

## 1. 研究開始当初の背景

ボーズ=アインシュタイン凝縮系等を記述する非線形シュレディンガー方程式は、実験的研究の進展から、近年ますます重要な研究対象となっている。理論的には、特殊解であるソリトン解が発見され議論されているが、線形の場合と異なり、解全体のなす集合の構造すらいまだ見通せない状態である。最も簡単な系の一つである円環状グラフ上での非線形シュレディンガー方程式の研究が、ここ5年ほどの急速な進展を見せて来た。

(A) グラフ節点での流速保存条件は、線形、非線形シュレディンガー系を問わず同一であるのに、節点の多様性をもたらす物理に関して、「自由接続」のみが用いられて来たこれまでの非線形シュレディンガー方程式の研究では、ほとんど注意が払われていない。

(B) 多様なグラフ節点の時間的変化を考えることで、現在盛んに行われているボーズ・アインシュタイン・ガスの周期的攪拌の実験的研究を、数学的に感銘な形でモデル化できることに、学会での議論を通じて思い至った。

グラフ上の線形シュレディンガー方程式における、筆者の研究の蓄積を直接活かせる機会と捉えて、節点の多様性と運動を考慮したグラフを考え、その上での非線形シュレディンガー方程式の解の性質を解明しようというのが、この研究の基本構想である。

関連する研究としては三つが注目に値する。まず、無限直線に一般化点状相互作用を加えた系の Adami による研究が進展している。また Matrasulov によって、完全透過条件をもつ次数3の節点のあるグラフ上での非線形シュレディンガー方程式の解の滑らかな分岐を示す数値例が示されていた。さらに Pelinovsky によって、自由接点を持つ簡単な開放グラフ系のスペクトル解析が行われていた。我々の研究計画は、グラフ節点の物理という道具の導入によって、この3つの研究を統合し、定常運動という新機軸を加えて、グラフ上の非線形シュレディンガー方程式の研究を、さらに前へ推し進め、新境地を開拓するものである。

## 2. 研究の目的

グラフ上の非線形シュレディンガー方程式の数理的な興味は、その簡明性と非自明性の共存にある。可積分系であるがゆえに、グラフ各線分上の解を楕円関数として具体的に書き下せ、非線形系にも関わらず問題が解析的にも数値的にも既存の手法と計算資源で扱える範囲内にある。グラフの節点における波動関数の接続条件は、そこから射出される線の本数(節点の次数)を  $n$  として  $n^2$  個の実数パラメータで定められる。この大きなパラメータ空間上では、ベリー位相や新奇量子ホロノミー等の非自明な現象の存在が予想される。

通常の線形シュレディンガー方程式とは異なり、非線形系では一般にパラメータの変化に対して、固有値が滑らかに連続的に変化することは保証されず、固有値の分岐、合体、突然の消滅、発生が起こりうるからである。実際我々は、予備的研究において、次数2の節点を持つ(すなわち一点に欠陥のある)リングという最も簡単なグラフ上でキュービクな非線形シュレディンガー方程式の固有値を数値的にもとめ、節点の性質を決めるパラメータの断熱的变化に対する固有値の動きに、予期された非自明性を見出した(文献1、2)。グラフ上の非線形シュレディンガー方程式の固有解のパラメータ依存性として、いかなる形態のものがありうるか、それはどのように分類されるか。それをういていかなる断熱的状态操作が可能なのか、これらの解明を目指すのが、我々の第一の核心的な問いである。

研究の背景の第二は、最近の、定常的攪拌を加えたボーズアインシュタイン凝縮系の実験的研究とその理論解析の進展である(Ramanathan 2011, Eckel 2014, Kunimi 2015, Kunimi 2018)。そこではリング状一次元空間に閉じ込めた系の特定領域に外場を印加し、この領域をリング上で等速度に動かした時の定常流状態のスペクトルが調べられ、スワロウテイル型スペクトルの存在等、新しい知見が得られている。これを等速度で回転するグラフ節点として理想化すれば、上記の静的点欠陥のモデルの直接的な拡張と考えることができる。すなわち動力学的量子グラフとしての定式化である。すると超越方程式の数値解としてエネルギー固有値を求めることにより、非線形シュレディンガー方程式の解をほぼ解析的に構成することが可能となる。我々は予備的研究(文献3)において実際にそのような試みを始め、系の性質を定性的に再現し、さらに節点の回転数や強度を制御パラメータとする断熱制御を提案した。この方法を拡張一般化して、実験との接点を失わぬ形で、動力学的量子グラフ上で非線形シュレディンガー系の制御が行えないか、これが我々の第二の核心的な問いである。

研究の背景の第三は、量子グラフ理論、すなわちグラフ上の(線形)シュレディンガー方程式の研究の発展と成熟である。量子グラフ系の研究によって、量子カオス現象の理解がすすみ、電子素子の量子揺らぎの一般的性質の起源の解明が進んだ。我々がここで特に注意を促したいのは、我々の過去の研究(文献4)に見出される、非コンパクトな量子グラフ系において量子節点を適宜設定した上、量子グラフ系の外線への電場の印加によって、量子粒子の流れを詳細に制御する手法の提案である。

このモデルは量子細線を組み合わせた回路からなる単電子素子を抽象化した数学的モデルと考えることができる。その実験的実現はまだ先と見込まれる単粒子量子素子と並んで、多粒子系を用いての流速の制御を考える意義は大きいと想定され、それが凝縮状態にあるボーズ粒子系全体を一つの波動関数で記述する、非線形シュレディンガー方程式における上記類似のモデル系の解析を必然要請することになるのである。線形系と非線形系で、何が同じで何が異なるのだろうか。グラフ上線形シュレディンガー方程式系における流速制御に類似の現象が、同様なグラフ上での非線形シュレディンガー方程式系でも実現できるのか。この探求が我々の第三の核心的な問いである。

### 3. 研究の方法

キュービクな非線形性を考え、節点のある簡単なグラフ系で、パラメータ空間上での断熱変化に対する固有状態の応答を数値実験で調べる。具体的にはリングに複数の次数 2 節点を持つ系、 $n$  個のリングが次数  $2n$  の節点一つで接している系、複数の各自二つの次数 4 節点を持つリングが節点で数珠繋ぎに結びついた系などである。パラメータ空間上での非自明な固有値の振る舞いを探り、量子ホロノミーを利用した系の断熱的操作を提案する。

上記の系で節点の位置や性質に時間変化のある動力学的グラフ系を考察して、定常流状態のスペクトルとその安定性、パラメトリックな移行を調べ、実験との対比、分析、そして新たな実験の提案を行う。

非線形シュレディンガー方程式系における散乱について、できるだけ一般的な広く適用できるフォーマリズムを考えることから始めなければならない。

それを用いて、もしくはそれのできない場合は、1ソリトン解を開放外線から導入しての数値実験に基いた解析を行う。まずは Matrasulov らの提案する反射のない「準透過型」節点を持つグラフでのソリトン解の分化を調べ、ついでより一般の型の節点で数値実験を行う。

上記いずれかの手法によって、もしくは両手法の併用で、非線形量子グラフ上での散乱においても予想される、閾値共鳴現象、フィルタリング現象の存在のための条件と特質を調べ、ボーズ・アインシュタイン凝縮系の新たな制御法の、実験的な検証を提案する。

### 4. 研究成果

本研究の成果は大きく分けて二つある。

第一は量子的点状相互作用についての新たな知見であり、具体的には通常のディラック・デルタ相互作用とは異なる、波動関数の導関数は連続に保ったまま波動関数自体に不連続性をもたらす「デルタプライム型相互作用」を有限で特異でない山形および谷型のポテンシャルから構成する方法の確立である。一次元ボーズアインシュタイン凝縮の制御を実現するための理論的整備のために解析的取り扱いの実現が大変有用である。この解析的取り扱いのための重要な要素として「一次元点状相互作用」がある。これは我々の文脈では二つの場面で現れる。一つは多電子系の相互作用を接触型相互作用で近似する場面であり、もう一つは外場による攪拌によって凝縮帯を操作する際の「攪拌棒」をやはり接触型相互作用で置き換える場面である。いずれの場合も、実験的に実現可能な滑らかな有限レンジの相互作用が、どのような場合にどのような接触型相互作用で置き換えられるのか、これまではよく知られていなかった。われわれは今回、「谷=山=谷」の三起伏のある箱型ポテンシャルの短距離極限を、数値的に解析するとこによって、デルタ型、および赤緑型デルタプライム型の接触相互作用をもたらすための構成法を確立することができた。

成果の第二は複数元素からなるボーズ・アインシュタイン凝縮の状態制御の、簡単ではあるが十分に現実的な理論的モデルの構成である。具体的には、複数エージェントが二次元格子グリッド空間を埋め尽くすかを調べるためのモデルを構成した、それに関する数値シミュレーション研究を行った。二種以上のエージェントを考え、同種エージェント間には引力を、異種エージェント間には斥力を仮定する。これをラティス状のエージェントに即して表現すると次のようになる。離散的な時間進展を考え、各時間ステップで正方格子状に配置されたセル上に一つまでのエージェントが配置されているとする。各サイト上のエージェントは、自分の周囲の8つの隣接サイトにどのようなエージェントがいるかに応じて、次の時間ステップにおいてそのセルとどまるか、もしくは他所のエージェントのいないセルにランダムに移動するかのどちらかの動きをとるとする。その条件とは1)隣接サイトの異種のエージェントの数が閾値  $N_s$  よりも多いか、または2)隣接サイトの同種エージェントの数が閾値  $N_a$  未満であるか、であると。このようにして二つの閾値を持つ2パラメータ・モデルが得られる。系の制御パラメータとして、格子状のセルのどれほどがエージェントで埋まっているか、すなわちエージェント密度を考える。ランダムな初期状態から出発して、十分に長い時間発展の末、系が定常的な状態になった時のエージェントの配置パターンを見る。

異種間斥力が弱く(すなわち  $N_s$  が8に近い大きな値)、同時に同種間引力が弱い(すなわち  $N_a$  が1に近い小さな値)の場合、終状態は初期状態と類似の、異種がほぼランダムに混在するままのパターンとなる。同種間引力を強くした場合( $N_a$  を3、4、5と大きくした場合)、密度を上げ

ていくと、エージェントがランダムに動き回る「気体」的な状態から、同種エージェントが液滴状に集結する状態への移行する様が見られた。この意向は、実は疑似一次相転移であって、シミュレーション時間無限大の仮想的極限では消滅し、全ての密度で液滴状態への収束が見出される。次に異種間斥力が強くした場合 ( $N_s$  を 5、4、3 と小さくした場合) エージェント密度を制御パラメータとして、ランダムな初期状態から始めて、不定形の境界線で区分された領域に異なったエージェントが棲み分けするパターンへの移行が見られた。この意向は  $N_s$  が 5 以上では 2 次相転移、そして  $N_s$  が 4 そして 3 の場合は相転移のない滑らかな移行である。異種間斥力が非常に強い  $N_s = 2$  の場合の結果は突起に値し、ここでは低密度の散開した分住状態から、0.6 近辺の臨界密度を越えた時、安定な終状態の存在しないカオス的不安定状態への一次相転移が観測された。以上の成果は未だ未出版の次の文献にまとめられている。

T. Cheon and M. Kobayashi, "Phase transition in urban agglomeration and segregation", arXiv.org:2302.11318 (2023).

複数元素からなるボーズ・アインシュタイン凝縮の状態制御の理論的モデルに見出された、異種混在状態と同種液滴状集結状態、また異種分離状態の間の相転移、また不安定なカオス状態の出現は、数理生態学的また社会物理学的設定での二種のアクティブ・エージェントの混住及び分離の多彩なパターンの出現と数学的に同等であって、これは分野を超えた全く異なった対象で同じ動力学が実現される例としても興味深いであろう。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 全 卓樹	4. 巻 63
2. 論文標題 インターネット世論と社会物理学	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of the Atomic Energy Society of Japan	6. 最初と最後の頁 805 ~ 806
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3327/jaesjb.63.12_805	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 全卓樹	4. 巻 52-1
2. 論文標題 人間社会を科学で理解できるか？	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 現代思想	6. 最初と最後の頁 142-151
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 1件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Taksu Cheon
2. 発表標題 Phase transition in urban agglomeration and segregation
3. 学会等名 KUT Workshop 2022 “Nonequilibrium Statistical Physics of Cooperative Systems ” (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 全卓樹
2. 発表標題 都市集住と隔離の相構造
3. 学会等名 MIMS 研究会 2022 “社会物理学とその周辺 ”
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 尾木七海、全卓樹
2. 発表標題 2種族および3種族都市集住モデルの相構造
3. 学会等名 日本物理学会第78回年次大会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 尾木七海、全卓樹
2. 発表標題 3種族都市集住モデルの相構造
3. 学会等名 日本物理学会2024年春季大会
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 全卓樹	4. 発行年 2023年
2. 出版社 朝日出版社	5. 総ページ数 192
3. 書名 渡り鳥たちが語る科学夜話	

1. 著者名 河出書房新社	4. 発行年 2022年
2. 出版社 河出書房新社	5. 総ページ数 240
3. 書名 嫌いな教科を好きになる方法、教えてください！	

〔産業財産権〕

〔その他〕

全卓樹ホームページ (researchmap)  
[https://researchmap.jp/T\\_Zen](https://researchmap.jp/T_Zen)

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------