

令和 6 年 6 月 7 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2021～2023

課題番号：21K03498

研究課題名(和文)自由境界プラズマに対する非線形拡張MHDシミュレーション技法の構築

研究課題名(英文)Development of nonlinear extended MHD simulation technique for free boundary plasma

研究代表者

廣田 真(Hirota, Makoto)

東北大学・流体科学研究所・准教授

研究者番号：40432900

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,000,000円

研究成果の概要(和文)：プラズマが真空と接する周辺部では、密度が下がるにつれてMHDの近似が破綻するため、物理的に正しい解をMHDで求めることができない。本研究では従来用いられてきた擬真空モデルに加えて、二流体効果を含んだ拡張MHDモデルを用いる方法について検討を行った。具体的にZピンチ平衡を解析の対象とし、真空領域に囲まれるプラズマの平衡解を数値的に求めた。プラズマが断熱変化をする場合は界面が特異点となり、数値計算でこの特異性を正則化する方法を提案した。また、拡張MHDモデルでは、真空領域でも微小な粘性が存在しないと平衡状態が得られないことがわかった。これにより拡張MHDはプラズマの自由境界を扱うことができる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

磁場閉じ込め核融合プラズマや天体プラズマは、真空領域によって囲まれていることが多く、外側に向かって密度は徐々に下がっていく。プラズマの運動を記述する磁気流体力学(MHD)は古くから用いられてきたが、密度がゼロになると物理的に正しくなくなり、数値計算も非常に不安定になることが長年の問題となっている。本研究の成果は、MHDをより物理的に正しい形に拡張することで、真空領域を含めた数値解析が可能になることを提案しており、核融合研究や天体物理などの様々な問題に応用できると期待される。

研究成果の概要(英文)：In the peripheral region where plasma contacts vacuum, a physically correct solution cannot be obtained by MHD, since the MHD approximation breaks down as the density decreases. In this study, we investigated a method using an extended MHD model that includes two-fluid effects in addition to the conventionally used pseudo-vacuum model. Specifically, we analyzed Z-pinch equilibrium and numerically calculated the equilibrium solution for a plasma surrounded by a vacuum region. When the plasma changes adiabatically, the interface becomes a singular surface, and we proposed a method to regularize this singularity in numerical calculation. Furthermore, in the extended MHD model, it was found that an equilibrium state cannot be obtained unless a small amount of viscosity exists in the vacuum region. Then, the extended MHD can handle free boundary problems.

研究分野：プラズマ物理学

キーワード：磁気流体力学 自由境界問題 二流体プラズマ

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

巨視的なプラズマの流動現象を記述する(非相対論的な)磁気流体力学(MHD)は理論・数値計算で広く用いられている。MHD方程式は本来の二流体プラズマ方程式(イオンと電子の流体方程式とマクスウェル方程式の連立システム)に多くの近似を課して導出される。このMHD近似は密度が希薄になると破綻することが知られており、プラズマと真空をつなぐ界面(=自由境界)をMHD方程式は正しく扱えないという根本的な問題がある。磁場閉じ込め核融合プラズマや天体プラズマは真空の領域に囲まれていることが多い。中心部のバルクプラズマはMHD近似が良く成り立つとしても、真空と接する周辺部においてMHDを適用するのは数値的にも物理的にも様々な課題が残されている。

具体的には、通常のMHDにおけるオームの法則に従うと、真空の領域でも大きな電流が流れてしまい、明らかに非物理的な結果となる。これに対し、密度が小さい領域では電気抵抗を非常に大きくし、電流を強く減衰させる方法が用いられており、擬真空モデルなどと呼ばれる。これは物理的にも正当化できる方法ではあるが、しばしば電気抵抗の与え方は人為的である。電気抵抗を大きくするほど「硬い」拡散方程式となり、陰解法を用いる必要があるため計算コストは高い。また、真空領域ではアルヴェン波の位相速度が無限大になるというもう一つの問題がMHDにはあり、こちらは非物理的というだけでなく、深刻な数値的不安定性を引き起こす。MHD方程式をフルに陰解法で解けば、数値的不安定性を回避することができるが、やはり計算コストは非常に大きくなってしまふ。そもそも密度が小さい領域ではMHDモデルの適用自体が妥当ではなく、それらしい解が数値的に得られたとしても、物理的に正しい結果ではない可能性もある。

MHD方程式を導出する際には、電子慣性長とイオン慣性長が小さいとみなして無視される。しかし、これらの慣性長は密度の二乗根に逆比例するため、密度が小さいほど大きくなり、真空の極限では無限大になる。よって、これらを無視せずに取り入れたモデル(拡張MHDと呼ぶ)ならば、真空と接する周辺部のプラズマの挙動をMHDよりも正しく扱えると考えられる。拡張MHD方程式は近年注目を集めているが、その適用範囲や解の性質については未だ十分に調べられていない。

### 2. 研究の目的

本研究は、三次元の磁気流体力学(MHD)シミュレーションにおいて、扱いが困難とされる自由境界プラズマ(真空領域に囲まれたプラズマ)の非線形計算を可能にするため、物理的にも妥当な拡張MHDモデルを用いた手法を提案し、自由境界における拡張MHD解の性質および適切な数値解法を明らかにする。

### 3. 研究の方法

#### (1) 拡張MHDモデルの物理的な適用範囲

二流体方程式を出発点とすると、通常のMHDは電子慣性長とイオン慣性長に対応する電子慣性効果とホール効果(これらをまとめて二流体効果と呼ぶ)および相対論的效果を無視して導出される。拡張MHDは相対論的效果のみを無視した極限で得られるが、このモデルの適用範囲は明確ではない。そもそもMHDの適用範囲も自明ではない。本研究は二流体方程式を無次元化し、各項のバランスを注意深く考察するスケール解析を行った。これにより、無次元パラメータで張られる空間の中で、MHDや拡張MHDの適用範囲を考察する。

#### (2) Zピンチ平衡に対する拡張MHDの適用

プラズマと真空の境界が自然に表れる最も単純な問題として、本研究は円柱プラズマのZピンチ平衡を扱った(図1)。Z方向に定常な外部電圧を印加するとZ方向に電流が駆動され、Z方向に誘導される磁場との電磁力によって、中心向きのピンチ力が発生する。プラズマの圧力と電磁力が釣り合った状態がZピンチ平衡であり、プラズマはピンチ力で閉じ込められるため、周辺部の密度は自然とゼロになる。しかし、通常のMHDでは真空領域で圧力が負になるなどして、物理的な平衡が得られない。これに対し、擬真空モデルを用いた場合と拡張MHDモデルを用いた場合をそれぞれ解析し、真空領域を含むZピンチ平衡を調べた。それと同時に、数値的に拡張MHD方程式を解くために必要な数値解法を考察した。ちなみにZピンチ平衡はキンク不安定であることが知られているが、本研究では不安定性が起きる前の一次元平衡を簡単のため

考察の対象としている。

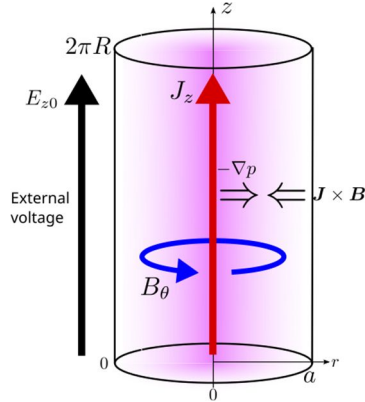


図 1 円柱領域の Z ピンチ平衡

#### 4. 研究成果

##### (1) 拡張 MHD モデルの物理的な適用範囲

相対論的な二流体方程式を無次元化する際、簡単のため等方性を仮定し、ベクトル場の空間 3 成分は同じオーダーとみなすと、全部で 5 つの無次元パラメータが現れる。この中で、イオンと電子の密度差（荷電分離）と速度差（電流）のスケールは「適度に小さい」オーダーであることが MHD 近似において不可欠となる。逆に言えば、これらが大きい場合は、プラズマ振動やサイクロトロン振動が運動の主役となり、二流体方程式をそのまま解くべきと考えられる。これら 2 つのスケールが小さい場合に、無次元化された方程式がオーダー O(1) でバランスを保つための条件を課すことで、無次元パラメータの数を 3 つに減らすことができる（プラズマ振動やサイクロトロン振動よりもゆっくりした時間スケールに着目することに対応）。3 つの無次元パラメータはプラズマの代表的な密度、流速そして磁場強度のスケールに対応する。さらに流速をアルヴェン速度のスケールとすることが、いわゆるアルヴェンオーダーリングと呼ばれるものであり、これによって無次元パラメータは 2 つになる。図 2 は横軸が密度、縦軸が磁場のスケールに対応する無次元化パラメータの空間で、様々な MHD モデルの適用範囲を表示したものである。スケール解析なので、厳密に適用範囲の境界線を引くことはできないが、目安として無次元パラメータが  $10^{-4}$  以下の場合に無視できると仮定して境界線を引いている。

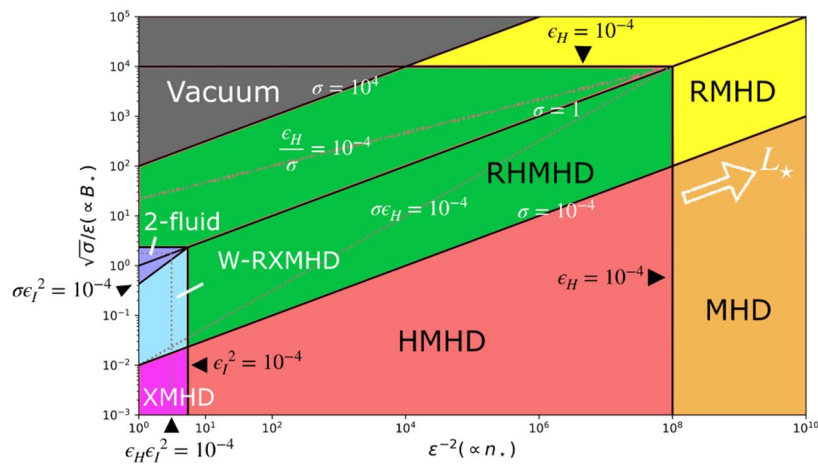


図 2 各種 MHD モデルの適用範囲(R=Relativistic, H=Hall, X=eXtended)

全体的に磁場がある程度強くなると相対論的效果が無視できなくなるが、磁場と密度が大きければ、なんらかの MHD モデルが成り立つ。また、磁場が弱く、非相対論的な強度の場合に、密度が下がると拡張 MHD(=XMHD)が妥当な領域に入ることがわかった。磁場が非常に強くなるとアルヴェン波は単なる電磁波になってしまい、プラズマの運動を無視した真空中の電磁場が主役となる。その意味で図の左上は Vacuum となっている。

## (2) Z ピンチ平衡に対する拡張 MHD の適用

本研究は「擬真空モデル」と「拡張 MHD モデル」を用いる場合を両方調べたが、いずれの場合においてもプラズマと真空の界面において、比熱比 $\gamma$ が重要なパラメータであり、数値計算においても特別な注意を要することがわかった。まず、プラズマが等温変化をする場合は状態方程式で $\gamma = 1$ とすることに対応する。この場合は密度が指数関数的に希薄になるが、厳密にゼロの真空状態にはならない(大気の密度成層と同様)。明確に界面の位置も定義できない。一方、プラズマが断熱変化をする場合(よく用いられるのは $\gamma = 5/3$ )では、平衡解が明確な界面をもち、そこから先は恒等的に密度がゼロの真空となる。界面において解は正則ではなく、特異点となっているため、数値計算において平衡解が求まらない、平衡状態に近づくとき解が数値的発散をするという問題が起きる。界面において僅かに正則化をする数値技法として、本研究では密度が非常に小さくなった所で $\gamma$ を人為的に1へ切り替える方法を提案した。これによって密度が厳密にはゼロにならなくなるが、それは数値誤差の範囲であり、特異な理論解に対する十分よい近似となる。

現実の磁場閉じ込めプラズマ装置では、真空容器の内部でプラズマを閉じ込めるが、プラズマの周囲は完全な真空ではなく、電離していない中性ガスが希薄に存在する。この中性粒子との衝突により、イオンと電子の運動量が $1/\tau_n$ という時定数で減衰するとざっくり仮定すると、それは電気抵抗に $\epsilon_i^2/(\tau_n \rho)$ という項が加わることに対応する。ここで、 $\epsilon_i = d_e/L$ は電子慣性効果の寄与を表す無次元パラメータである。密度 $\rho$ がゼロに近づくとき電気抵抗は急激に発散し、これは擬真空モデルの物理的に妥当な解釈とみなせる。この擬真空モデルを採用して Z ピンチ平衡を求めた例を図3に示す。 $r = 0.48$ あたりに界面が現れているが、 $\epsilon_i^2/\tau_n = 0.01$ という微小値を与えているため、電流は急峻にゼロになり、MHD 解は真空領域へと接続されている。 $\gamma = 5/3$ であり、密度分布が界面で正則でないことも見て取れる。

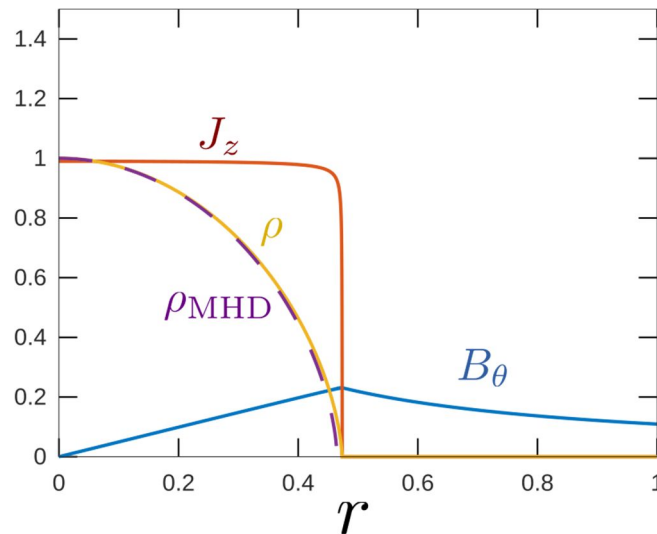


図3 擬真空モデルにおける Z ピンチ平衡

拡張 MHD モデルを採用した場合は、オームの法則において電子慣性項および電子粘性項が加わり、電子の運動方程式になることが特に重要である。より厳密に言えばイオンと電子の速度差  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e$  の運動方程式である。電場がかかると  $\mathbf{u}$  は加速されるが、電気抵抗や粘性の効果によって最終的に有限な速度で平衡に達するのが自然である。密度  $\rho$  がゼロになると電流  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{u}$  もゼロになるため、そこでは粘性の効果だけが電場による加速とバランスする。拡張 MHD シミュレーションを安定に行うために粘性項は必要であるが、Z ピンチ平衡という定常状態に落ち着くためにも、微小な粘性が真空領域にまで存在することが必要である。密度が限りなくゼロであっても有限な速度場が存在する状態はゴーストプラズマと呼ばれることがあるが、拡張 MHD における真空領域の理論的な扱いが正にそうなる。図 4 は電気抵抗  $\eta$  が定数で、粘性係数  $\mu$  が  $\epsilon_0^2 \mu / \eta = 0.001$  という値で拡張 MHD 方程式を解いた例を示す。速度場  $u_z$  が真空領域まで滑らかに分布し、 $r = 1$  では滑り無し境界条件が課されている。真空領域において  $u_z \propto \log r$  となっており、クエット流のように粘性応力は存在するものの、ゴーストプラズマにかかっている力はゼロである。粘性係数を小さくするほど MHD の解に近づいていくが、界面における  $u_z$  の値は際限なく大きくなっていき、粘性がゼロの極限では(電場による加速で)  $u_z = \infty$  となる。つまり、通常の MHD への極限では平衡状態が消失することを意味する。このように、拡張 MHD シミュレーションを行う際には、真空領域における微小な粘性係数の存在が不可欠であり、それによってプラズマと真空の境界が物理的にも適切に扱えることが示された。

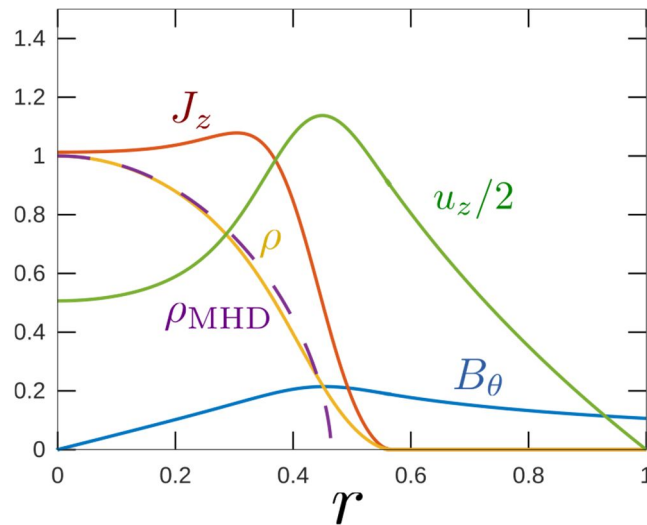


図 4 拡張 MHD モデルにおける Z ピンチ平衡

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計12件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 6件）

1. 発表者名 Makoto Hirota
2. 発表標題 Application of extended magnetohydrodynamic model to plasma-vacuum systems
3. 学会等名 64th Annual Meeting of the APS Division of Plasma Physics (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 廣田 真
2. 発表標題 自由境界プラズマの解析に対する拡張MHDモデルの適用
3. 学会等名 第27回数値トカマク実験 (NEXT) 研究会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 廣田 真
2. 発表標題 圧縮性拡張MHDシミュレーションにおける自由境界プラズマ平衡
3. 学会等名 NIFS共同研究「高ベータトラスプラズマ研究会」
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Makoto Hirota
2. 発表標題 Theoretical and Numerical Properties of Extended MHD: Importance of Electron Inertia
3. 学会等名 US-Japan MHD Workshop on "MHD activity measurement and control in long-pulse operations towards DEMO" (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 廣田 真
2. 発表標題 散逸的拡張MHDシミュレーションにおける境界条件の実装
3. 学会等名 日本物理学会2021年秋季大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 廣田 真
2. 発表標題 圧縮性拡張MHD方程式の数値シミュレーション技法
3. 学会等名 日本物理学会第77回年次大会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Makoto Hirota
2. 発表標題 Extended magnetohydrodynamic approach to plasma-vacuum interface
3. 学会等名 7th Asia-Pacific Conference on Plasma Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Makoto Hirota
2. 発表標題 Extended MHD equilibrium having boundary layer at plasma-vacuum interface
3. 学会等名 65th Annual Meeting of the APS Division of Plasma Physics (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Shuntaro Yoshino, Makoto Hirota, Yuji Hattori
2. 発表標題 Classification of extended MHD models for special relativistic plasmas using scale analysis
3. 学会等名 65th Annual Meeting of the APS Division of Plasma Physics (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 廣田 真
2. 発表標題 プラズマ-真空境界を含むZピンチに対する拡張MHD平衡解
3. 学会等名 日本物理学会2023年春季大会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Makoto Hirota
2. 発表標題 Extended MHD solutions for plasma-vacuum interface that is singularly perturbed by electron inertia
3. 学会等名 RIMS Workshop on "Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics" (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 廣田 真
2. 発表標題 拡張磁気流体力学におけるプラズマ-真空界面の特異摂動解析
3. 学会等名 日本物理学会 第78回年次大会
4. 発表年 2023年



〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------