

令和 6 年 5 月 30 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2021～2023

課題番号：21K11753

研究課題名（和文）低次元トポロジーに基づく低レベルプログラミング言語の設計と分析

研究課題名（英文）Design and analysis of low-level programming languages via low-dimensional topology

研究代表者

長谷川 真人（Hasegawa, Masahito）

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：50293973

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,500,000円

研究成果の概要（和文）：従来のプログラム意味論は高水準プログラミング言語について多くの成果を挙げてきたが、低水準言語実装については未だ発展途上段階にある。本研究は、低水準実装モデルと結び目理論等の低次元トポロジーの親和性に注目し、低水準実装モデルに対応できるトポロジカルなプログラム意味論の構築を目指した。特に、変数の順番の入れ替えを許さない平面ラムダ計算・平面コンビネータ代数の理論をもとに、変数の入れ替えを組み紐で表現するブレイド付きラムダ計算や、結び目の不変量を与えるリボン圏に対応するコンビネータ代数の理論を構築した。同時に、基礎となるモノイダル圏について、ホップモノイドによるトレース構造の持ち上げを中心に調べた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究はプログラミング言語の理論の基礎付けに関するものであり、圏論や幾何学・トポロジーの知見や技法をプログラム意味論に取り入れること、および必要となる圏論の整備の両方を目指したものである。本研究によりプログラミング言語設計やプログラム検証に用いることのできる数学的手法が拡充され、短期的には、このような低次元トポロジー的なアプローチに基づく理論研究の活性化・深化、また、長期的には、実装レベルに踏み込んだソフトウェア開発・検証技術の発展に寄与することが期待される。

研究成果の概要（英文）：Traditional program semantics has achieved many results on high-level programming languages. On the other hand, semantics on the low-level implementation model of programming languages is still in the developing stage. This research focuses on the affinity between low-level implementation models and low-dimensional topology such as knot theory, and aims to construct topological program semantics that can support low-level implementation models. As first steps towards this direction, we introduced a theory of planar combinatory algebras in terms of operads and monoidal categories, and studied a braided lambda calculus in which swapping of variables are realized by braids. Furthermore, we introduced ribbon combinatory algebras, which correspond to ribbon categories used in the study of invariants of knots and tangles. At the same time, we studied traced monoidal categories and their lifting problem via Hopf monads.

研究分野：理論計算機科学

キーワード：プログラミング言語 意味論 圏論 低次元トポロジー モノイダル圏 ラムダ計算 コンビネータ代数

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

(1) プログラミング言語の実装と圏論を用いたプログラム意味論

古典的なプログラム意味論では、その関心の中心は、高水準プログラミング言語で記述されるようなプログラムの挙動の分析にあり、具体的な実装方法等の低水準の問題について議論することは中心的な課題とはみなされていない。これは、プログラムの意味は、プログラムの表す高水準の構造によって定まるべきであり、低水準の実装の詳細に左右されるべきではないという、プログラミング言語設計の大前提からみれば自然なことである。

しかし、現実には、多くの高水準プログラミング言語が、抽象機械や中間コードへのコンパイル等、ある程度抽象化された低水準実装モデルを前提に設計されているため、高水準プログラミング言語のエンドユーザ(プログラマ)にとっても、実装モデルの適切な理解を持つことがしばしば要求される。古典的なプログラム意味論は、このような実装モデルを設計・分析するための有効な道具を十分に提供できていない。

例えば、Haskell に代表される関数型プログラミング言語の意味論は、おおむね、名前呼びラムダ計算とその意味論に基づいているが、実際の言語実装を見ると、非効率な名前呼びラムダ計算の意味論は用いられず、STG 機械等で実現された、計算資源を共有し計算結果を再利用する必要呼び評価方式を採用している。このような必要呼びを用いた実装を定式化し分析するための意味論は、既に 1990 年代からその重要性が認識され研究もなされてきた(研究代表者自身の研究については文献 2 を参照)。けれども、それらはほとんどが操作的・構文的なものであり、構文論に依存しない表示的意味論は現在も確立されていない。この問題に限らず、プログラミング言語実装の意味論の構築は、多くの研究者の努力にも関わらず、いまだに理論的にも実用的にも満足できるレベルには達しておらず、現在のプログラム意味論における重要な課題の一つである。

一方、圏論を用いたプログラム意味論は、抽象機械・中間言語など適度に抽象化された言語実装モデルと相性が良い。これは古くは圏論的抽象機械の研究、より最近ではゲーム意味論や相互作用の幾何などの研究に見られることである。研究代表者自身も、これまでに、プログラミング言語における計算資源の共有、相互作用、および再帰や継続などの制御構造の分析を行うためのプログラム意味論を、圏論、特にモノイダル圏を用いて構築し、プログラミング言語の型システムや等式理論の分析を行ってきたが、その多くは実装モデルと圏論的意味論の親和性に着目したものである。

(2) プログラム意味論と低次元トポロジー

モノイダル圏等の圏論の枠組みは、もともと、純粋数学の代数学及び幾何学・トポロジー(位相幾何学)と密接に関連して発展してきた。2010 年頃、研究代表者は、モノイダル圏の枠組みを用いて、プログラム意味論と量子トポロジーの橋渡しとなるモデルを構築することに成功した。具体的には、量子群の構成法のひとつである量子二重化を用いて、プログラム意味論で用いられている圏から、非自明な絡み目(ブレイド)を持ち、かつ計算資源の共有や再帰プログラムの解釈もできるリボン圏を実際に構成した(文献 4)。この成果は、ロバストな量子計算の実現方式として盛んに研究されている位相的量子計算に密接に関係しており、提案者は、長期的に、位相的量子計算に対応するプログラム意味論を構想し研究している。このアプローチもまた、位相的量子場の理論に基づく、2 次元系における準粒子の挙動として定式化された、極端に低水準の言語実装モデルの意味論の研究と位置づけることができる。

一見すると、これは、先に述べたプログラミング言語の実装の意味論とはかけ離れた話題に見えるが、研究代表者が構築した実例は、もともと必要呼び実装モデルで用いられる巡回共有データ構造のために代表者が学位論文(文献 1)で構築した意味論を量子化したものであり、これらふたつの研究の流れは、共通の出発点から生じた兄弟関係にあるものである。技術的に

も、共通する圏論的構造（モノイダル圏，特にトレース付きモノイダル圏）を用いており、極めて親和性が高い。

さらに俯瞰的・長期的な視点に立つと、「種々の変換に対して不変な図形の性質（不変量）」を研究する幾何学と、「計算の実行過程において不変なプログラムの性質」を研究するプログラム意味論には、概念的な類似が多く見られる（文献3）。以上に述べた背景は、それらの類似に理論的実体をもたらす試みであるとも言える。

2. 研究の目的

本研究では、プログラミング言語実装モデルと、結び目の理論等の低次元トポロジーの親和性に焦点を当て、低レベル・超低レベルの実装モデルに対応できるトポロジカルなプログラム意味論の構築を行う。特に、以下のふたつの課題に取り組む。

(1) 低次元トポロジーに対応するプログラミング言語：



結び目や組み紐（ブレイド）の情報を表現できるよう拡張したプログラミング言語とその位相的量子計算等の超低レベル実装モデルへの応用

(2) モデル構成技法の深化とその応用：

トポロジカルなプログラム意味論の主要な道具となるモノイダル圏の構成技法を発展・拡充させ、それに基づく効率の良い言語実装のための意味論の構築

3. 研究の方法

(1) プログラミング言語の非可換化（非対称化）の研究

プログラム意味論で用いるモノイダル圏は、そのほとんどが対称的、すなわち交差に対応する射が存在するものである。低次元トポロジーにおいては、対称性よりもブレイド、すなわち3次元空間での交差とが自然な対象である。ゆえに、低次元トポロジーとの融合のためには、プログラミング言語とその意味論を、対称性によらないかたちで展開する必要がある。このような、非可換化（非対称化）の可能性について言語設計と意味論の両面から取り組む。

(2) モノイダル圏、特にトレース付きモノイダル圏の基礎理論の研究

プログラム意味論と低次元トポロジーに共通する基本的な構造であるトレース付きモノイダル圏の基礎理論の整備を進める。近年、ホップモノイドが、テンソル圏の良い構造の多くをモノイドの代数の圏に持ち上げる有用なモノイドとして注目されてきた（典型例はホップ代数・量子群およびその拡張の表現論である）。良いトレース付きモノイダル圏を構成する手法は応用上も大変重要であり、トレースを持ち上げるモノイドの精密な特徴づけに取り組む。

4. 研究成果

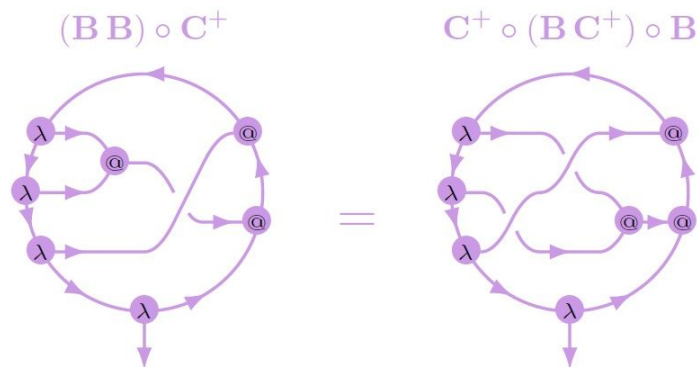
(1) プログラム実装の意味論および位相量子計算の意味論の両方に共通する基礎となる、ブレイド（組み紐）を持つラムダ計算の構文論と意味論を研究した。ブレイドはデータの順序の入れ替えの3次元空間における実装を表現しているとみなせる。ブレイドを持つ計算系・証明体系の研究は先例があるが、ラムダ計算としての定式化はこれがはじめてである。たとえば、関数の引数を入れ替える演算は、ブレイド付きラムダ計算では以下のような複数の実装を持つ。

$$C^+ = \lambda fxy. \left[\begin{array}{c} y \text{---} x \\ x \text{---} y \\ f \text{---} f \end{array} \right] (f y x) \quad C^- = \lambda fxy. \left[\begin{array}{c} y \text{---} x \\ x \text{---} y \\ f \text{---} f \end{array} \right] (f y x)$$

ブレイド付きラムダ計算に対応するコンビネータ代数もあわせて導入し、関数合成をあらわすB、恒等関数をあらわすIと上で述べたC⁺、C⁻の4つのコンビネータを組み合わせることで、ブレイド付きラムダ計算のすべての項が生成できることを示した。このブレイド付きラムダ計算は型を持たないため、その意味論を与えることは量子トポロジーや位相的量子場の理論で用いられる圏（たとえば量子群の有限次元表現の圏）では困難である。この問題を、以前の研究で構成し

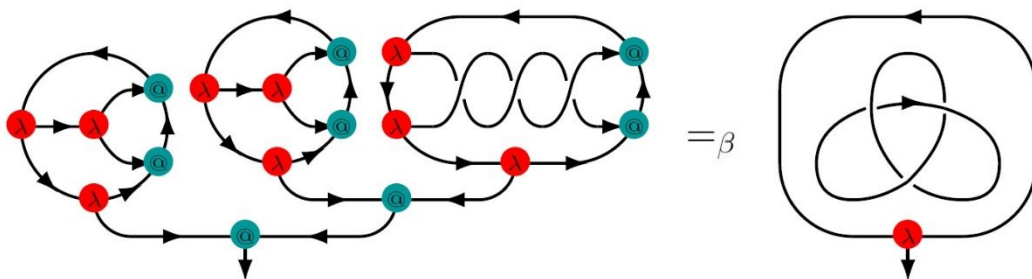
た交差 G 集合と適切な二項関係のなすリボン圏を用いることで解決し、具体的なモデルの例を与えた（文献 5）

(2) 上述したブレイド付きラムダ計算に対応するコンビネータ代数の理論を、閉オペラドの枠組みを用いて展開した。これにより、未解決だったブレイド付きコンビネータ代数の公理化と、ブレイド付きコンビネータ代数からブレイド付き閉オペラドを普遍的に構成する手法を与えることができた。さらにそれを、平面コンビネータ代数から閉オペラドを構築する一般論に拡張した。以下に示すのは、ブレイド付きコンビネータ代数からブレイド付き閉オペラドを構成する過程から抽出された公理の例である。この公理は結び目グラフの基本的な変形(ライデマイスター変形)に対応しており、幾何的に自然に正当化することができる。



これらの成果を論文にまとめ、査読付き国際会議で発表した（文献 6）

(3) さらに、(2) の成果を発展させ、結び目やタングルを表現できるリボンコンビネータ代数を導入し、その特徴づけや基礎的な性質を調べた。下図は、トレースをつくりだすトレースコンビネータによる三葉結び目の実現例である。



この成果をまとめた論文は、査読付き国際会議で発表することが決まっている（文献 9）

(4) トレース付きモノイダル圏の構造を持ち上げるモナドの特徴づけについて、ホップモナドの概念を手掛かりに研究を進めた。ホップモナドがトレース付きモノイダル圏の構造を持ち上げる必要十分条件を特定した。また、ホップモナドではないがトレースを持ち上げるようなモナドの具体例や、トレースを持ち上げないホップモナドの実例の構築に成功した。また、冪等なモナドがトレース構造を持ち上げる必要十分条件、テンソル積が双積である場合のホップモナドの特徴づけ等を見出し、論文にまとめ出版した（文献 7 , 8）

引用文献

M. Hasegawa (1999) *Models of Sharing Graphs: A Categorical Semantics of let and letrec*. Distinguished Dissertation Series, Springer-Verlag.

K. Nakata and M. Hasegawa (2009) *Small-step and big-step semantics for call-by-need*. Journal of Functional Programming 19(6):699-722.

長谷川真人 (2010) プログラム意味論とトポロジー 再帰・相互作用・結び目 . 日本数

学会 2010 年度秋季総合分科会企画特別講演アブストラクト, 37-49.

M. Hasegawa (2012) *A quantum double construction in Rel*. *Mathematical Structures in Computer Science* 22(4):618-650.

M. Hasegawa (2021) *A braided lambda calculus*. In *Proc. Linearity-TLLA 2020*, *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* 353:94-108.

M. Hasegawa (2023) *The internal operads of combinatory algebras*. In *Proc. 38th International Conference on Mathematical Foundations of Programming Semantics*, *Electronic Notes in Theoretical Informatics and Computer Science* 1.

M. Hasegawa and J.S. Lemay (2023) *Traced monads and Hopf monads*. *Compositionality* 5(10).

M. Hasegawa and J.S. Lemay (2023) *Hopf monads on biproducts*. *Theory and Applications of Categories* 39(28):804-823.

M. Hasegawa and S. Lechenne (2024) *Braids, twists, trace and duality in combinatory algebras*. To appear in *Proc. 39th ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, ACM Press.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Hasegawa Masahito	4. 巻 353
2. 論文標題 A Braided Lambda Calculus	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science	6. 最初と最後の頁 94 ~ 108
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4204/EPTCS.353.5	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hasegawa Masahito	4. 巻 Volume 1 - Proceedings of...
2. 論文標題 The Internal Operads of Combinatory Algebras	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Electronic Notes in Theoretical Informatics and Computer Science	6. 最初と最後の頁 1-19
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.46298/entics.10338	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Masahito Hasegawa, Jean-Simon Pacaud Lemay	4. 巻 5
2. 論文標題 Traced Monads and Hopf Monads	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Compositionality	6. 最初と最後の頁 10 ~ 10
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.32408/compositionality-5-10	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Masahito Hasegawa, Jean-Simon Pacaud Lemay	4. 巻 39
2. 論文標題 Hopf Monads on Biproducts	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Theory and Applications of Categories	6. 最初と最後の頁 804 ~ 823
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Masahito Hasegawa, Serge Lechenne	4. 巻 -
2. 論文標題 Braids, Twists, Trace and Duality in Combinatory Algebras	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Proc. 39th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1145/3661814.3662098	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

[学会発表] 計3件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 Masahito Hasegawa
2. 発表標題 The internal operads of combinatory algebras
3. 学会等名 38th International Conference on Mathematical Foundations of Programming Semantics (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masahito Hasegawa
2. 発表標題 The Internal Operads of Combinatory Algebras
3. 学会等名 理論計算機科学と圏論ワークショップ
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 長谷川真人
2. 発表標題 プログラム意味論と圏論...と幾何
3. 学会等名 日本ソフトウェア科学会第40回大会 (招待講演)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
英国	University of Oxford			
オーストラリア	Macquarie University			
フランス	ENS Paris-Saclay			