様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６年　４月２７日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：若手研究
研究期間：2021～2023
課題番号：２１Ｋ１３７６３

研究課題名（和文）層的バナッハ代数を用いたサイクルによる特異ホモロジー論

研究課題名（英文）Theory on singular homology of cyclyes using sheafy Banach algebras

研究代表者
三原　朋樹（Mihara, Tomoki）

筑波大学・数理物質系・助教

研究者番号：９０８２７１０６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　400,000円

研究成果の概要（和文）：整数論の主たる研究対象の一つに、整数の方程式の解の対称性を司るガロア群という代数的対象がある。ガロア群を調べるためには、行列の応用であるガロア表現という道具を用いることが一般的であり、そのためにはガロア表現を豊富に構成してそれが非自明なものであることを判定する必要がある。
本研究ではパーフェクトイド空間の余単体的対象という幾何的対象を構成することでアディック空間の特異ホモロジーという幾何的不変量を定義し、それにガロア表現の構造を付与した。
更にガロア表現の非自明性を判定するための道具立てとして特異ホモロジーに沿った積分論を展開した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
先述したように新たにガロア表現を豊富に得られ、また積分論により非自明性の検証方法が与えられている。期待したようにこれらがガロア群の構造に関する研究に実際に役立てられれば、整数論の目標の１つである整数の方程式の解の対称性の記述に貢献することとなる。
また今回はパーフェクトイド空間という非常に良い無限次元空間を完備群環という道具を用いて構成できたため、リジッド幾何学の壁の１つである無限次元空間のsheafy性の判定の複雑さという問題にも今後の応用を期待している。

研究成果の概要（英文）：A main target of the research of number theory is the algebraic object called Galois groups, which controls the symmetry of solutions of an equation of integrs. It is typical to use a tool called Galois representation, which is an application of linear algebra, in order to study Galois groups, For this purpose, one needs to construct various Galois representartions and verify their non-triviality.
This research is devoted to a construction of Galis representations realisedas a geometric invariant called singular homology defined for adic spaces through the construction of a geometric object called a cosimplicial perfectoid space.
In addition, we developed a theory on integration along the singular homology in order to verify the non-triviality of the Galois representations.

研究分野：数論幾何

キーワード：リジッド幾何　p進解析　ガロア表現　積分

１．研究開始当初の背景

整数論の主たる研究対象の一つに、整数の方程式の解の対称性を司るガロア群という代数的対象がある。ガロア群を調べるためには、行列の応用であるガロア表現という道具を用いることが一般的であり、そのためにはガロア表現を豊富に構成してそれが非自明なものであることを判定する必要がある。

ガロア表現を構成するために、古典的にはグロタンディークのスキーム理論という代数幾何の枠組みが広く用いられるようになり、数論幾何という分野が発展した。一方で近代では数論幾何の発展に伴い、代数幾何の枠組みでは捉えにくい幾何学的対象が必要とされるようになっていったため、リジッド幾何という解析幾何の枠組みが急速に普及していった。

リジッド幾何は有限次元的な空間を扱う上ではスキーム理論と同様な計算が可能であったが、無限次元的な対象を扱う際にはテイト非輪状性という重要な性質が失われるという問題があった。そこで近年ショルツ氏が考案したパーフェクトイド空間はテイト非輪状性を持つ無限次元的な対象であり、パーフェクトイド空間を用いることで無限次元的な対象のテイト非輪状性にまつわる諸問題を解消することが可能となる。

２．研究の目的

本研究では特異ホモロジー理論のリジッド幾何への応用を行う。このアイデア自体は修士論文時点で画策していたものだが、当時はショルツ氏のパーフェクトイド空間が世界中に広まるより以前であったため、当然修士論文はパーフェクトイド空間とは無縁のものであった。そこで今回新たに、パーフェクトイド空間の枠組みの中で特異ホモロジー理論を扱うことで、修士論文の時点では大きな障壁として立ちはだかっていた無限次元的な対象のテイト非輪状性の問題を解消し、より扱いやすいガロア表現の構成を行う。

またガロア表現の非自明性を検証できるようにするために、並行して積分論を展開する。すなわち、サイクルに沿った微分形式の積分を定義することで、積分値が非零であることによりサイクルがヌルホモロガスであることを担保する。

３．研究の方法

p 進的な可除性を持つノルム付き群に対し、完備群環を用いることでパーフェクトイド代数を構成する。そしてパーフェクトイド体と多面体に対して実際にそのようなノルム付き群を構成する。これらを組み合わせるにより、各標準単体にパーフェクトイド空間を付随させることができる。これはパーフェクトイド空間の余単体的対象を構成するということにほかならない。

パーフェクトイド空間の余単体的対象が得られれば、圏の一般論によりアディック空間の特異ホモロジーが定義される。また完備群環を用いた構成から、ノルム付き群へのガロア作用を通じて余単体的対象に自然なガロア作用が誘導され、結果的に特異ホモロジーにガロア表現の構造が付与される。

更に特異ホモロジーのサイクルに沿った積分論を展開することで、こうして得られたガロア表現の非自明性を調べるための手がかりを得る。ただし一般のサイクルに沿った一般の微分形式の積分は収束する保証がないので、ダガー空間の理論を参考にサイクルか微分形式に過収束性を追加で課すことで可積分性が担保できることを期待した。

４．研究成果

特異ホモロジーの構成まではおおよそ期待通りに成功した。正確には、当初予定した定式化だとサイクルが少なくなりすぎるという問題があったため、若干の修正をした。具体的には、完備群環そのものではなく、そこから標準単体上の関数環への自然な射の像を取ることでサイクルを豊富に持つようにした

積分の定式化については、残念ながら過収束性が可積分性を担保するという当初の期待に対する反例が存在した。そのため、過収束性を課す代わりに可積分性を直接課すことで方針を大幅に修正した。当初の期待を証明するために様々な補題を示したので、それらが結果的に可積分性の判定にも役立つことを期待している。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

前述したように積分の定式化で大幅な方針修正があったため、執筆の遅れが生じた。それに伴い現在も執筆中であるが、ページ数が増えることが予想されるので時間がかかる想定である。執筆終了次第、投稿する。

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関