

令和 6 年 6 月 5 日現在

機関番号：52201

研究種目：若手研究

研究期間：2021～2023

課題番号：21K13766

研究課題名（和文）ブルバキ完全列解析とその応用

研究課題名（英文）Study on Bourbaki sequences and its applications

研究代表者

神代 真也（Kumashiro, Shinya）

小山工業高等専門学校・一般科・助教

研究者番号：40896023

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の属する可換環論は、可換環の構造を調べることを目的としている。可換環論の研究方法は大きく分けて、環の内部構造を調べるイデアル論、環の外部表現を調べる加群論の二つがあり、双方から多岐に渡る研究が展開されている。本研究では、主目的であったブルバキ完全列の解析について、ブルバキ完全列の一般化といえる加群のフィルトレーションの構成を行った。更に、そのフィルトレーションをヒルベルト関数を反映している特別な加群に対し適用することで、節減数が2または3のイデアルのヒルベルト関数挙動を明らかにした。その他にも、正準イデアルに関する研究も行い、成果を挙げる事ができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ブルバキ完全列は与えられた加群を自由加群とイデアルに分解する短完全列のことである。ブルバキ完全列を通して、加群の性質をイデアルに遺伝させることができるため、可換環論の様々な問題において応用がある。本研究では、ブルバキ完全列を一般化させたフィルトレーションの構成を行った。またその構成を応用することで、ヒルベルト関数解析の研究に対し寄与することができた。

研究成果の概要（英文）：Commutative Algebra, to which this research project belongs, aims to investigate the structure of commutative rings. There are two main approaches to commutative ring theory: ideal theory, which investigates the internal structure of rings, and module theory, which investigates the external representation of rings. In this project, the purpose was to study the Bourbaki sequences, and we constructed a filtration of modules, which is a generalization of the Bourbaki sequences. Furthermore, by applying the filtration to exact modules reflecting the Hilbert function, we clarified the behavior of the Hilbert function of ideals of reduction numbers 2 or 3. We also explored canonical ideals.

研究分野：可換環論

キーワード：Cohen-Macaulay環 ヒルベルト関数 正準イデアル

1. 研究開始当初の背景

ブルバキ完全列とは、与えられた加群 M を自由加群 F とイデアル I に分解する短完全列 $0 \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow I \rightarrow 0$ のことである。よく知られている事実として、ネーター正規整域上のねじれのない加群はブルバキ完全列を少なくとも一つ持つことが知られている (=ブルバキの定理)。ブルバキの定理のおかげで、短完全列 $0 \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow I \rightarrow 0$ を通して加群 M の様々な性質をイデアル I に帰着させることができる。この手法の有効性を示す応用の一例として、加群の Rees 代数の構造解析・直既約 Cohen-Macaulay 加群の分類・コホモロジーの消滅問題などがあり、事実、論文 [Simis-Ulrich-Vasconcelos (2003), Herzog-Kühl (1987), Auslander (1966)] では、上記の問題に対してブルバキの定理を用いることで優れた成果を挙げている。

こうした豊富な応用を持つ一方で、ブルバキの定理はブルバキ完全列の存在性のみを主張しており、具体的にブルバキ完全列を構成するための理論は知られていなかった。そのため、ブルバキイデアル I や、ブルバキ完全列そのものを調べる研究は自然でありながらも進展があまりみられない状況であった。この方向の研究について、研究代表者は、J. Herzog 氏と D. I. Stamate 氏との共同研究にて、線形写像の表現行列に着目し、「与えられた線形写像がブルバキ完全列を導出するか否か」の判定法を与えていた。そこで、この研究をブレイクスルーとして、ブルバキ完全列の更なる研究とその応用を目指した研究が期待されていた。

2. 研究の目的

本研究課題の主な目的は、大きく

- (1) ブルバキ完全列の理論 (特に構成方法) の深化
- (2) ブルバキ完全列に関連する諸研究への応用

の二つである。より具体的には、以下のことを目指した。

- (1) 一般にブルバキ完全列は与えられた加群に対し、無数にある。そこで、良いブルバキ完全列とはいかなるものかを考察し、適切な条件を追加し絞り込むことで一意性を与える。また、そのとき導出されるブルバキイデアル I の構造を明らかにする。
- (2) (1)の知見を活かして、ブルバキ完全列を用いた応用が知られている既存の諸研究に対し、更なる応用を目指す。

3. 研究の方法

上記研究目標について下記の順に段階的に明らかにする。

はじめに、具体例を解析して全体像を把握する。研究代表者は先行研究において、線形写像 $F \rightarrow M$ がブルバキ完全列 $0 \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow I \rightarrow 0$ を導出するかどうかの判定条件を与えている。そこで、この判定法がコンピューターの計算に乗せることができる状況 (基礎環が体上の多項式環など) において与えられた加群のブルバキ完全列を全て記述するといった徹底的な具体例探索を行う。そこから、なにが成り立ちそうかの予想を立て、証明を試みる。特に、加群を一つ固定したときに、ブルバキ完全列の選び方によらない性質がないかを調べる。

次に、ブルバキ完全列 $0 \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow I \rightarrow 0$ が与えられたとき、線形写像 $F \rightarrow M$ から I を求めるアルゴリズムの導出を試みる。主な研究方法は、線形写像の表現行列の行列式イデアルに着目するやり方である。 I の自由分解は、 M の自由分解と F で記述でき、またその表現行列の“良い”部分行列の行列式イデアルから I を復元できる。問題なのは、この“良い”部分行列の見つけ方である。ブルバキ完全列の選び方によって、適切な部分行列の選び方も変わってくる。前述の具体例探索を参考に、(総当たりでない)適切な部分行列の選び方の発見を目指す。

最後に、上述の過程で得た知見をもとに、

- ・ヒルベルト関数解析
- ・加群のリース代数の構造解析
- ・直既約コーヘン・マコーレー加群の分類

への応用を目指す。上記研究課題においては、ブルバキ完全列を用いた応用があることが知られている。これらへの応用を視野に入れつつブルバキ完全列の理論構築を推し進める。

4. 研究成果

・本研究目的(1)に関連して、ブルバキ完全列を一般化する加群のフィルトレーションの構成法を与えた。その応用として、節減数2のイデアルのヒルベルト関数挙動と随伴次数環の深度の関係を明らかにした。更に、節減数3の整閉イデアルについても類似の結果を得た。その他、ヒルベルト関数から定まる不変量 (sectional genera) について調べ、その振る舞いが環のコーヘン・マコーレー性やゴレンシュタイン性などを特徴づけることを示した。

更なる派生的な成果として、ヒルベルト関数と類似の振る舞いをする既約関数について、ヒルベルト関数との関係を調べることも行った。

・正準イデアルを用いたゴレンシュタイン性解析を行った。まず、正準イデアルの節減数に着目し、正準イデアルの節減数が小さい環の性質について、正準加群のトレースイデアルと関連させつつ、明らかにした。その後、正準加群のトレースイデアルについての研究を行った。正準加群のトレースイデアルはゴレンシュタイン軌跡を記述していることが知られているため、正準加群のトレースイデアルが大きいときについては先行する結果がある。そこで、正準加群のトレースイデアルが最小となるときの環の性質について調べた。結果として、正準加群のトレースイデアルに関するいくつかの予想の反例を構成した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件／うち国際共著 4件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kumashiro Shinya	4. 巻 30
2. 論文標題 Integrally Closed Ideals of Reduction Number Three	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Algebra Colloquium	6. 最初と最後の頁 315 ~ 324
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S1005386723000263	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kumashiro Shinya	4. 巻 20
2. 論文標題 When are Trace Ideals Finite?	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Mediterranean Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 278
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00009-023-02481-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kumashiro Shinya	4. 巻 227
2. 論文標題 The Auslander-Reiten conjecture for certain non-Gorenstein Cohen-Macaulay rings	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 107420
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jpaa.2023.107420	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kumashiro Shinya, Truong Hoang Le, Yen Hoang Ngoc	4. 巻 15
2. 論文標題 On the sectional genera and Cohen-Macaulay rings	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Commutative Algebra	6. 最初と最後の頁 577 ~ 594
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1216/jca.2023.15.577	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Herzog Juergen, Kumashiro Shinya	4. 巻 119
2. 論文標題 Upper bound on the colength of the trace of the canonical module in dimension one	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Archiv der Mathematik	6. 最初と最後の頁 237 ~ 246
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00013-022-01764-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kumashiro Shinya	4. 巻 50
2. 論文標題 The reduction number of canonical ideals	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 4619 ~ 4635
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00927872.2022.2069790	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Herzog Juergen, Kumashiro Shinya, Stamate Dumitru I.	4. 巻 619
2. 論文標題 The tiny trace ideals of the canonical modules in Cohen-Macaulay rings of dimension one	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 626 ~ 642
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2022.12.026	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kumashiro Shinya	4. 巻 -
2. 論文標題 Graded filtrations and ideals of reduction number 2	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/mana.202100329	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 An Tran Nguyen, Kumashiro Shinya	4. 巻 52
2. 論文標題 Irreducible multiplicity and Ulrich modules	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Rocky Mountain Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1795 ~ 1799
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1216/rmj.2022.52.1795	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 Shinya Kumashiro
2. 発表標題 Graded filtrations and ideals of reduction number two
3. 学会等名 Mini workshop on commutative algebra (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Shinya Kumashiro
2. 発表標題 Rings having a finite number of trace ideals
3. 学会等名 The 28th National School on Algebra (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Shinya Kumashiro
2. 発表標題 Certain monomial ideals whose numbers of generators of powers descend
3. 学会等名 第3回情報数理論セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shinya Kumashiro
2. 発表標題 正準加群のトレースのcolengthの上限
3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shinya Kumashiro
2. 発表標題 Study on \mathbb{Z}_2 graded rings
3. 学会等名 Workshop The 11th Japan-Vietnam Joint seminar on Commutative Algebra, by and for young mathematicians (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Shinya Kumashiro
2. 発表標題 Graded Bourbaki ideals of graded modules and Ideals of reduction number two
3. 学会等名 Virtual Commutative Algebra Seminars (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shinya Kumashiro
2. 発表標題 When are trace ideals finite?
3. 学会等名 第2回情報数理論セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shinya Kumashiro
2. 発表標題 次数付フィルトレーションと節減数2のイデアル
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shinya Kumashiro
2. 発表標題 Graded filtrations and ideals of reduction number two
3. 学会等名 第42回可換環論シンポジウム(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shinya Kumashiro
2. 発表標題 Graded filtrations and ideals of reduction number two
3. 学会等名 第1回情報数理セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shinya Kumashiro
2. 発表標題 Graded Bourbaki ideals of graded modules
3. 学会等名 オンライン可換環論セミナー2021
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Homepage: <https://www.oit.ac.jp/ge/~kumashiro/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------