様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月 ２７ 日現在

機関番号：３７５０１
研究種目：若手研究
研究期間：2021～2023
課題番号：２１K１３７７７

研究課題名（和文）Shi配置研究への新たなアプローチ

研究課題名（英文）A new approach to research on the Shi arrangements

研究代表者
陶山　大輔（Suyama, Daisuke）

日本文理大学・経営経済学部・准教授

研究者番号：２０７４６７５５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,100,000円

研究成果の概要（和文）：超平面配置の自由性の研究において、Shi配置やCatalan配置は基本的であり重要な研究対象である。本研究の研究成果として、J.Bandlow氏とG.Musiker氏によって与えられたquasiinvariantの空間の基底の積分表示に着想を得て、A型の拡張Shi配置、及び拡張Catalan配置の対数的ベクトル場に対し、離散積分を用いた基底構成に成功した。また、Shi/Catalan配置に関連して、ゲイングラフによって得られる２種の超平面配置に着目し、それらの自由性が一致することを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
自由超平面配置は代数的側面や組み合わせ論的側面を持ち、様々な研究テーマと関わっているため、その研究は数学における多くの分野の研究に影響があるといえる。本研究の成果として得られたA型拡張Catalan配置やShi配置の基底構成の手法は、他のルート系に対する一般化Catalan/Shi配置の基底構成に応用され得るものと期待される。またゲイングラフから得られる超平面配置の自由性の一致についての研究は、自由性とグラフの性質がどのように関連するかを調べる今後の研究に影響を与えるものと考えている。

研究成果の概要（英文）：In the study of the freeness of hyperplane arrangements, the Shi and Catalan arrangements are fundamental and important objects of research. Inspired by the integral representation of the bases of quasiinvariant spaces given by J. Bandlow and G. Musiker, we have successfully constructed the basis using discrete integrals for logarithmic vector fields in the extended Shi and Catalan arrangements of the type A. In relation to the Shi and Catalan arrangements, we also focused on two types of hyperplane arrangements obtained by gain graphs and showed that their freeness coincide.

研究分野：自由超平面配置

キーワード：超平面配置　Shi配置　Catalan配置　Weyl配置　対数的ベクトル場　ゲイングラフ

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１（共通）

１．研究開始当初の背景

有限次元ベクトル空間内の有限枚の超平面の集合を超平面配置とよぶ．超平面配置は組合せ論や幾何学，代数幾何学など多くの分野と密接に関係する重要な研究分野である．有限次元実ユークリッド空間内のルート系に対し，正のルートに直交する鏡映面を集めたものを Weyl 配置と呼ぶ．また，Weyl 配置に各超平面をある規則で平行移動したアフィン超平面を付け加えたものを Shi 配置と呼ぶ．超平面配置に付随する対数的ベクトル場，すなわち，全ての超平面に沿うような多項式ベクトル場がなす加群が自由加群であるとき，超平面配置は自由配置であるといわれる．Weyl 配置は初めて統一的に自由配置であることが示されたクラスであり，超平面配置の分野では非常に基本的で重要な対象として扱われている．Shi 配置の自由性は，吉永正彦氏の研究によって，G. M. Ziegler による重複度付き超平面配置の理論や，代数幾何的な手法を用いて基底を構成することなく示された．その後，寺尾宏明氏，R. Gao 氏, D. Pei 氏，陶山によって基底構成がなされたが，それらはルート系の型に依存しており，全ての型を尽くしてはおらず，また得られた基底の形も非常に複雑なものであった．一方，Ish 配置は q,t-Catalan 数の新しい解釈を与えるために D. Armstrong によって導入された．Ish 配置は Shi 配置の研究をするうえで重要な役割を担う可能性を多分に秘めていることが D. Armstrong と B. Rhoades によって指摘されている．例えば，各配置のある特殊な条件を持つ部屋（超平面によって分けられる領域）の個数が等しいことや，超平面配置に対して定義される特性多項式が等しいことなど共通する性質がいくつかあり，個別にそれらを計算しようとしたとき Ish 配置の方がはるかに取り扱いやすいのである．このような共通性が，組合せ論的な立場に留まらず，対数的ベクトル場の加群という立場から眺めたときにどのように現れるのかを調べること，及び，その結果によって部分 Shi 配置の自由性やその基底構成の研究に応用できないかと考えたのが、本研究の背景である．

２．研究の目的

A 型のルート系に対応する Shi 配置に対し，A 型以外のルート系に対応する超平面配置を含めたものを一般化された Shi 配置と呼ぶ．また Shi 配置と同様に，Weyl 配置に各超平面をある規則で平行移動した超平面を付け加えた超平面配置に Catalan 配置と呼ばれるものがある．一般化された Catalan 配置と Shi 配置の間の部分配置がいつ自由配置になるかについては完全にはわかっていない（部分結果として，阿部拓郎氏，寺尾宏明氏によりイデアル Shi 配置であれば自由であることが知られている）．一般化された Catalan 配置と Shi 配置の間の部分配置の自由性を解明することが本研究の目的である．

３．研究の方法

研究開始当初は以下のような研究手法を想定していた．

A 型の Shi 配置と Ish 配置の対数的ベクトル場の加群の間に自然な同型をつくることが出来ないかを調べる．例えば，グラフ G に対応する Shi 配置の部分配置 Shi(G)と Ish 配置の部分配置 Ish(G)に対しては，G にある条件を与えることにより自由配置であることが，Shi(G)に対しては C. A. Athanasiadis によって，Ish(G)に対しては阿部拓郎氏，辻栄周平氏，陶山の結果として示されている．更にこのとき，自由加群である対数的ベクトル場の加群の基底の次元の組も Shi(G)と Ish(G)で同一のものとなることがわかっており，自由性を与える条件を G が持つとき，次数加群として対数的ベクトル場の加群が同型であることが分かる．問題なのは自由配置とならないときであり，この場合を含め同型となることを示さなければならない．Ish 配置を以下の二つの方向に拡張することを考える．

・Shi 配置は A 型の Weyl 配置 W の各超平面に平行な超平面を１枚ずつ付け加えたものとして定義されている．この付け加える超平面の枚数を増やした配置は拡大 Shi 配置と呼ばれる．拡大 Shi 配置に対応する Ish 配置を考えるのが，一つの拡張の方法である．

・もう一つは，ルート系の型として A 型以外の既約ルート系を取った場合に定義される一般化された Shi 配置に対応する Ish 配置を考えるというものである．

以上のように研究開始当初は，Ish 配置との類似性から一般化された Shi 配置の自由性について調べることを想定していたが，A 型以外のルート系に対し Ish 配置の一般化の自由性から Shi 配置の自由性を調べる手法が予想に以上に困難であったため，Shi 配置，及びその周辺の超平面配置の性質について直接調べる手法にシフトすることになった．

４．研究成果

（１）A 型の拡張 Catalan 配置，及び拡張 Shi 配置の離散積分による基底構成

J.Bandlow 氏と G.Musiker 氏によって与えられた quasiinvariant の空間の基底の積分表示[①]が，A 型の Coxeter 配置に奇数の定数重複度を付けて得られる多重超平面配置の対数的ベクトル場の基底を与えることが M.Feigin 氏によって指摘された．この多重配置の対数的ベクトル場は Catalan 配置の対数的ベクトル場の主要項と見做すことができる．吉永正彦氏との共同研究によ

り，Bandlow と G.Musiker の基底表示にある種の離散化を施すことで，A 型の拡張 Catalan 配置の基底を構成することに成功した．また，その手法から着想を得て，A 型の拡張 Shi 配置の基底を構成することにも成功した．
（２）ゲイングラフから定まる２種の超平面配置の自由性の一致
グラフの辺にある種の群の元でラベル付けしたものをゲイングラフと呼ぶ．ゲイングラフによって様々な重要なクラスの超平面配置を記述することができる．辻栄周平氏，Michele Torielli 氏との共同研究により，ある２種のゲイングラフによって定義される超平面配置について，それらが自由になるときのゲイングラフが一致することを示した．

＜引用文献＞

① J. Bandlow, G.Musiker, A new characterization for them-quasiinvariants of Sn and explicit basis for two row hook shapes. J. Combin. Theory Ser. A 115 (2008), no. 8, 1333-1357.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Daisuke Suyama, Masahiko Yoshinaga	４．巻 17
２．論文標題 The Primitive Derivation and Discrete Integrals	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3842/SIGMA.2021.038	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計2件（うち招待講演　1件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 陶山大輔
２．発表標題 Catalan配置とShi配置の離散積分による基底構成について
３．学会等名 旭川離散数学セミナー（招待講演）
４．発表年 2023年

１．発表者名 辻栄周平、陶山大輔、M.Torielli
２．発表標題 ゲイングラフから定まる2種類の超平面配置の自由性の一致について
３．学会等名 日本数学会2024年度年会
４．発表年 2024年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関