

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 6 日現在

機関番号：13601
研究種目：若手研究
研究期間：2021～2023
課題番号：21K13805
研究課題名(和文)ノイマン・ポアンカレ作用素のスペクトル理論と一般化された積分作用素への拡張

研究課題名(英文)Spectral theory of Neumann- Poincare operators and its Generalization

研究代表者
宮西 吉久 (Miyanishi, Yoshihisa)

信州大学・学術研究院理学系・准教授

研究者番号：20740236
交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究において、様々な境界形状におけるノイマン・ポアンカレ作用素と呼ばれる積分作用素のスペクトル構造と応用を得ることが出来た。これらの結果は、多くの特異積分作用素と呼ばれる作用素のスペクトルでも汎用し易い形で構築されている。
尚、これらスペクトルの構造は領域境界の幾何学が深く関係しており、境界が滑らかでない領域に対しても、領域境界の幾何形状とスペクトルの漸近挙動の関係を発見することも出来ている。スペクトルはさらに、プラズモン共鳴と呼ばれる物理現象や純粋数学なら代数(単位の奇数分割の問題)にすら応用されることも分かった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究はとくに、スペクトル解析の進んでいる擬微分作用素と呼ばれる作用素を特異積分作用素の近似として用いることで、(自己共役でもない)計算の困難な特異積分作用素のスペクトル構造を得る方法を提案している。また、具体的な現象に対応したノイマン・ポアンカレ作用素と呼ばれる作用素のスペクトルによって、3次元(実空間における)の電磁気現象など物理現象の解明にも繋がっている。また、積分作用素のスペクトル構造を、代数や幾何学にまで応用できることも示している。

研究成果の概要(英文)：We obtained the spectral structure of integral operators (So-called Neumann-Poincare operators) for several domains. Such structure deeply depends on the boundary geometry and we proved the precise asymptotics even for boundaries which are smoother than C^2 . It is emphasized that the techniques employed in our papers can be applied for many general singular integral operators. Then the applications are considered in physics and pure mathematics. In physics, plasmons of electro-static phenomena are controlled by the spectral structure. In pure mathematics, we also prove the relation between algebraic structure (Partition of an unit interval) and the spectrum.

研究分野：大域解析学

キーワード：ノイマン・ポアンカレ作用素 積分作用素 スペクトル

1. 研究開始当初の背景

研究開始時点において、本申請課題の扱う積分作用素のスペクトル理論は、研究代表者や共著者によるもの以外は、実軸上(実次元)であったり、抽象性の高い定理が大勢を占めていた。とくに、特異積分作用素と呼ばれる(積分核に特異性がある)積分作用素に関わるスペクトル理論は、非常に簡単な場合か、応用し難い抽象的な形の定理が多めであった。このような状況下、応用計算や具体的な計算でスペクトル解析している多くの例や定理群が望まれていた。

とくに、線形偏微分方程式の境界値問題に関連した現象など、抽象論を具体例に適用する手法の必要性に駆られていた。例えば、すでに申請者の研究していたノイマン・ポアンカレ作用素のスペクトル理論は、その一例にはなっていた。ただし研究開始当初は、まだまだ実験的な段階にあり、スペクトルに関する定理群も細かい所までは追い詰めることは出来ていなかった。

2. 研究の目的

本申請課題は、一般には以下のような形で書かれる(線形)(特異)積分作用素 A のスペクトル構造を求めることを目的としている。

$$A[\psi](x) = \int_{\partial\Omega} K(x, y)\psi(y) dS_y$$

とくに、積分核と呼ばれる関数 $K(x, y)$ が特異性をもつ場合に、スペクトル構造を見つけることを主眼としている。このように、一般の特異積分作用素と呼ばれる作用素に**スペクトル理論を展開**するために、幾つか一般化しやすい例を積み重ねて理論を展開する。例えば、申請者が主に研究するノイマン・ポアンカレ作用素は一例であり、スペクトル理論を展開する上でも、一般性を失わないように、いたずらに抽象化するのではなく、他の具体例にも適用可能な定理群構築を目的としている。具体的な物理現象に対応した積分作用素にも適用可能な定理群の構築も目的としている。

3. 研究の方法

上記(2. 研究の目的)で述べた特異積分作用素を擬微分作用素で表す、もしくは近似することから始めた。自己共役でもない特異積分作用素について、ひな型として、ノイマン・ポアンカレ作用素を擬微分作用素で近似する方法を構築した。尚、この方法は、かなり一般の特異積分作用素でも利用できる形で構築されており、他の一般化された積分作用素の研究でも利用可能な方法を取っている。

また、多くの具体的な現象説明(電磁気現象などの物理現象)への応用も見据えて、数値計算も多用した。これら数値計算では、3次元のFEM(Finite Element Method)を用いたスキームの構築とワークステーションを用いている。

4. 研究成果

擬微分作用素のスペクトルに関しては、既に多くの結果が知られており、それら多くの結果が特異積分作用素にも適用可能になってきた。研究で得られた成果は、一般的な超局所解析の定理を、具体的な特異積分作用素に適用するための道筋になっている。

とくに、具体的なノイマン・ポアンカレ作用素については、幾何構造、代数構造や数理物理の現象の説明にも応用可能なことも分かった。また、数値計算も多用したことによって、プラズモン現象と呼ばれる物理現象にも数学的な説明を与えることが出来ている。これらの結果は、5. 主な発表論文に纏めて研究成果として発表している。

さらに、科研費を用いた専門家による研究集会なども実施し、7. 科研費を使用して開催した国際研究集会に纏めてある。ここでは、共同研究成果の発表やこれからの展望も見据えた研究討論によって、問題点をあらわにすることも出来た。

下記 URL には、研究会と研究集会の講演詳細(アブストラクト、動画など)を纏めて
掲示してある。

<http://math.shinshu-u.ac.jp/~miyanishi/workshop2023082122>

<http://math.shinshu-u.ac.jp/~miyanishi/workshop2023082425>

<http://math.shinshu-u.ac.jp/~analysis/index.html>

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 8件 / うち国際共著 6件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Fukushima Shota, Kang Hyeonbae, Miyanishi Yoshihisa	4. 巻 -
2. 論文標題 Decay Rate of the Eigenvalues of the Neumann-Poincare Operator	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Potential Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11118-023-10120-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Miyanishi Yoshihisa	4. 巻 121
2. 論文標題 A short note on decay rates of odd partitions: an application of spectral asymptotics of the Neumann-Poincare operators	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Archiv der Mathematik	6. 最初と最後の頁 419 ~ 424
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00013-023-01910-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 S. Fukushima, Yonggwan Ji, H. Kang, Y, Miyanishi	4. 巻 27(2)
2. 論文標題 Spectral properties of the Neumann-Poincare operator and cloaking by anomalous localized resonance: a review	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 The Journal of the Korean Society for Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 87 ~ 108
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.12941/jksiam.2023.27.087	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Ando Kazunori, Kang Hyeonbae, Lee Sanghyuk, Miyanishi Yoshihisa	4. 巻 54
2. 論文標題 Spectral Structure of the Neumann--Poincare Operator on Thin Ellipsoids and Flat Domains	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Mathematical Analysis	6. 最初と最後の頁 6164 ~ 6185
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/21M1452275	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Miyanishi Yoshihisa	4. 巻 406
2. 論文標題 Weyl's law for the eigenvalues of the Neumann--Poincare operators in three dimensions: Willmore energy and surface geometry	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 108547 ~ 108547
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2022.108547	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kazunori Ando, Hyoenbae Kang, Yoshihisa Miyanishi, Mihai Putinar	4. 巻 LXVI (3-4)
2. 論文標題 Spectral analysis of Neumann-Poincare operator	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 ROMANIAN JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS	6. 最初と最後の頁 545-575
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ando Kazunori, Kang Hyeonbae, Miyanishi Yoshihisa, Nakazawa Takashi	4. 巻 81
2. 論文標題 Surface Localization of Plasmons in Three Dimensions and Convexity	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 SIAM Journal on Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 1020 ~ 1033
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1137/20M1373530	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ando Kazunori, Kang Hyeonbae, Miyanishi Yoshihisa	4. 巻 146
2. 論文標題 Spectral structure of the Neumann--Poincare operator on thin domains in two dimensions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal d'Analyse Mathematique	6. 最初と最後の頁 791 ~ 800
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11854-022-0206-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Yoshihisa Miyanishi	4. 巻 2235
2. 論文標題 The spectral theory of the Neumann--Poincare operator on convex domains	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 2021 RIMS共同研究(公開型) 量子場の数理とその周辺 講究録	6. 最初と最後の頁 118 ~ 123
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計15件(うち招待講演 9件/うち国際学会 4件)

1. 発表者名 宮西吉久
2. 発表標題 Decay rate of the eigenvalues of the Neumann-Poincare operator
3. 学会等名 ポテンシャル論研究集会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yoshihisa Miyanishi
2. 発表標題 A short note on decay rates of odd partitions: an application of spectral asymptotics of the Neumann-Poincare operators
3. 学会等名 The 20th Linear and Nonlinear Waves (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yoshihisa Miyanishi
2. 発表標題 Layer Potential Type Operator のスペクトル理論
3. 学会等名 第66回 函数論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 宮西吉久
2. 発表標題 Layer Potential Type Operator のスペクトル理論 とその応用に向けて(日本数学会 特別講演)
3. 学会等名 日本数学会 (秋季) (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 宮西吉久
2. 発表標題 Fundamental solutions in Colombeau locally convex topological algebras
3. 学会等名 夏の作用素論シンポジウム(愛媛)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 宮西吉久
2. 発表標題 薄型領域におけるノイマン・ポアンカレ作用素のスペクトル
3. 学会等名 日本数学会 (年会) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yoshihisa Miyanishi
2. 発表標題 Weyl's law for the Neumann-Poincare operator and unsolved problems
3. 学会等名 Inha University seminar (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yoshihisa Miyanishi
2. 発表標題 Some remarks on fundamental solutions in Colombeau algebras
3. 学会等名 2022 年夏の作用素論シンポジウム(愛媛)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yoshihisa Miyanishi
2. 発表標題 Spectral asymptotics for some operators and related applications
3. 学会等名 スペクトル・散乱 待兼山シンポジウム(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yoshihisa Miyanishi
2. 発表標題 Surface localization of plasmons in three dimensions and convexity
3. 学会等名 International Conference on Partial Differential Equations Related to Material Science (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshihisa Miyanishi
2. 発表標題 大域解析学: 線形作用素のスペクトル理論とその周辺
3. 学会等名 信州大学 理学部 数学科 談話会(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshihisa Miyanishi
2. 発表標題 The spectral theory of the Neumann--Poincare operator on various domains and its applications to PDE
3. 学会等名 第10回信州関数解析シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshihisa Miyanishi
2. 発表標題 The spectral theory of the Neumann--Poincare operator on convex domains
3. 学会等名 2021 RIMS共同研究(公開型) 量子場の数理とその周辺 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yoshihisa Miyanishi
2. 発表標題 Spectral structure of double layer potentials on thin domains
3. 学会等名 2021 年度ポテンシャル論研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 宮西吉久
2. 発表標題 Full Quantization and the Spectral Theory on the Two-Dimensional Torus
3. 学会等名 作用素論シンポジウム (ZOOM)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

信州大学学術情報オンラインシステム https://soar-rd.shinshu-u.ac.jp/profile/ja.uCkCwpcN.html 線形作用素のスペクトル理論とその応用 https://www.shinshu-u.ac.jp/faculty/science/math/research-general/math-research-miyanishi.html Mini-Workshop http://math.shinshu-u.ac.jp/~miyanishi/workshop20220127

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計4件

国際研究集会 信州微分方程式セミナー	開催年 2022年～2023年
国際研究集会 Mini-Workshop on Mathematical Analysis and Related Topics	開催年 2021年～2021年
国際研究集会 Neumann--Poincare Operator, Layer Potential Theory, Plasmonics and Related Topics @ICIAM 2023 Tokyo	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 Additional Conference: Neumann--Poincare Operator, Layer Potential Theory, Plasmonics and Related Topics	開催年 2023年～2023年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
韓国	Inha University	Seoul National University	KIAS
米国	University of California, Santa Barbara		