様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　７ 年　６ 月 １６ 日現在

機関番号：２４３０４
研究種目：若手研究
研究期間：2021～2024
課題番号：２１Ｋ１３８３７

研究課題名（和文）双直交多項式解をもつ離散可積分系系列の研究

研究課題名（英文）Research on discrete integrable systems which have biorthogonal polynomial solutions

研究代表者
前田　一貴（Maeda, Kazuki）

福知山公立大学・情報学部・講師

研究者番号：８０７３２９８２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,800,000円

研究成果の概要（和文）：双直交多項式に対して簡約化という操作を行うことで導出される，五重対角行列に対応する離散可積分系と，三次方程式に対するニュートン法の可解な類似物について，その解を解析することでアルゴリズムとしての性質を明らかにした．また，ローラン双直交多項式と直交多項式がスペクトル変換を通じて直接移り合うことを利用して，二重対角行列束の一般化固有値問題を，同じ固有値を持つ三重対角行列の固有値問題に変換するアルゴリズムを構成した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
離散可積分系は種々のよい数値計算アルゴリズムとみなせるということが知られており，その拡がりが期待されているところである．本研究の成果もまた，こうした一連の研究に貢献するものであると考えられる．また，双直交関数の理論そのものも現在発展が続いているところである中，固有値問題変換アルゴリズムはよく知られた直交多項式を別の双直交関数に移す有力な手法を与えているともみなすことができ，今後の理論のさらなる発展に資することが期待される．

研究成果の概要（英文）：By applying a reduction procedure to biorthogonal polynomials, we derived a discrete integrable system associated with a pentadiagonal matrix and a solvable analogue of Newton's method for cubic equations. We clarified the algorithmic properties of them through analysis of their solutions. Furthermore, by utilizing the fact that Laurent biorthogonal polynomials and orthogonal polynomials can be directly transformed into each other via spectral transformations, we constructed an algorithm that converts the generalized eigenvalue problem of a bidiagonal matrix pencil into the eigenvalue problem of a tridiagonal matrix with the same eigenvalues.

研究分野：直交多項式，離散可積分系

キーワード：双直交多項式　離散相対論戸田格子　ニュートン法　離散2次元戸田格子　一般化固有値問題

１．研究開始当初の背景

可積分系の理論は特殊関数の理論と密接な関わりを持つ．特に離散戸田格子と直交多項式の関係では，直交多項式のスペクトル変換の両立条件が離散戸田格子の漸化式そのものであり，この関係を通じて半無限格子境界条件や非周期有限格子境界条件の場合の離散戸田格子の行列式解が構成できることがよく知られている．この関係は離散 2 次元戸田格子と双直交多項式の関係にそのまま一般化することができ，これに簡約化という操作を行うことで，例えば離散ハングリー戸田格子の行列式解も構成することができる．これらの離散可積分系の漸化式はそのまま行列の固有値計算アルゴリズムとなっており，解を構成すればアルゴリズムの解析に直接的に応用することができる．また，超離散化という極限操作により箱玉系と呼ばれるセルオートマトンの漸化式を得ることもでき，解の超離散化をすれば箱玉系の解を得ることもできた．

２．研究の目的

本研究では，上記背景にある研究を発展させ，既知の離散ハングリー戸田格子とは異なる離散可積分系を双直交多項式のスペクトル変換から導出し，その解構造を調べることで新たな帯行列固有値計算アルゴリズムの性質を解析することを目的とした．また，離散可積分系は行列固有値計算以外にも，元々の目的であった微分方程式の差分スキームや，数列の収束加速法など，数値計算法との親和性が高いことが知られていた．そのような研究の一つとして，二次方程式に対するニュートン法の漸化式とチェビシェフ多項式との関係がある．双直交多項式を用いればこれをより高次の方程式に対するニュートン法（のようなもの）に一般化できると発想し，具体的には三次方程式に対するニュートン法に類似する可解な数値計算法を構成し，その性質を調べることをもう一つの目的とした．

３．研究の方法

直交多項式であることはある形の三項間漸化式を満たすことと同値であることがよく知られている．一般の双直交多項式は漸化式を満たさないが，簡約条件を課すと漸化式を満たすようになる．直交多項式は(1，1)簡約という条件を双直交多項式に課すことで得られる．一方，離散ハングリー戸田格子に対応する双直交多項式を得るには(M,　1)簡約という条件を課せばよく，このとき(M+1+1)項間の漸化式を満たすことがわかる．つまり，直交多項式が三項間漸化式を満たすのは(1+1+1)=3 だからというわけである．一般に，(M,　N)簡約をすると(M+N+1)項間漸化式を満たす双直交多項式が得られ，その行列表示は帯幅(M+N+1)の帯行列となり，対応する離散可積分系はこれの固有値計算アルゴリズムを与えるという仕組みである．このからくりを活用して，行列固有値計算アルゴリズムやニュートン法の研究を展開した．

４．研究成果

(1) 五重対角行列に対する固有値計算アルゴリズムの研究

双直交多項式に(2,　2)簡約条件を課すことで，五重対角行列の固有値計算アルゴリズムを与える離散可積分系を導出することを目指した．実際にアルゴリズムを構成し，その行列式解も与えることもできたので，この成果を学会発表した．問題点として，直交多項式の場合には正規化をすることで対称三重対角行列に対する固有値計算を行うことができたが，(2,　2)簡約の双直交多項式の場合には正規化をしても対称五重対角行列の固有値計算とはならない．残念ながら，研究期間内にはこの問題を解決することができなかったが，先行研究では行列直交多項式とブロック三重対角行列の対応関係を論じたものがあり，これと双直交多項式の間の関係を調べることで進展があるのではないかと期待している．

(2) 三次方程式に対するニュートン法の可解な類似物

二次方程式に対するニュートン法の漸化式の解は三項間漸化式を用いて構成することができる．この構成法の一般化として，例えば四項間漸化式を用いれば三次方程式に対して二次収束する根の数値計算アルゴリズムが得られることが期待された．実際に期待通り，ニュートン法とよく似た漸化式が得られたが，一つの式では閉じずに二つの式の連立漸化式とする必要があることと，解について調べると，二次収束性はあるものの，例えば三つの根が全て実根のときには両端の二根のうち初期値に近い方にしか収束しないことがわかった．なお，二次収束だけでなく，三次収束などより高速なアルゴリズムを構成することも可能な他，割線法の一般化を考えることも可能である．この成果についても学会発表を行った他，雑誌論文として投稿中である．

(3) 行列固有値問題と一般化固有値問題の間の変換アルゴリズム

これは当初の目的にはなかったものであるが，関連して二重対角行列束の一般化固有値問題を，同じ固有値を持つ三重対角行列の固有値問題に変換する研究を実施した．使う道具はLaurent 双直交多項式と呼ばれるもので，スペクトル変換を n 回行って得られた Laurent 双直交多項式の時刻を n とすると，各時刻 n の n 次の多項式を取ってきて並べれば直交多項式になるという面白い現象が起こる．このことは直交多項式のモーメント行列式表示というものを見れば容易に確認できるのだが，実際に Laurent 双直交多項式の時間発展を計算するのに用いる離散相対論戸田格子の変数から対応する直交多項式の三項間漸化式の係数を計算できることが示され，この係数を並べれば求める三重対角行列となる．なお，逆に直交多項式から対応する Laurent 双直交多項式を構成することも可能である．行列の変換アルゴリズムとしての意義は，通常，一般化固有値問題は片方の行列の逆行列をもう一方の行列にかければ容易に通常の固有値問題に変換できるのだが，今回のように二重対角行列束であっても逆行列をかけると Hessenberg 行列となってしまい，元々の疎行列構造が壊れて密行列となってしまう．今回構成したアルゴリズムでは疎性を保った変換が可能である．この成果については雑誌論文として投稿し，無事に掲載することができた．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Katsuki Kobayashi, Kazuki Maeda, Satoshi Tsujimoto	４．巻 720
２．論文標題 An isospectral transformation between Hessenberg-bidiagonal matrix pencils and Hessenberg matrices without using subtraction	５．発行年 2025年
３．雑誌名 Linear Algebra and its Applications	６．最初と最後の頁 272～302
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.laa.2025.04.022	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計5件（うち招待講演　0件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 前田一貴
２．発表標題 離散可積分系を用いた一般化固有値問題から固有値問題への変換について
３．学会等名 神戸可積分系セミナー
４．発表年 2023年

１．発表者名 前田一貴
２．発表標題 正規双直交多項式と離散2次元戸田格子
３．学会等名 日本応用数理学会2022年度年会
４．発表年 2022年

１．発表者名 Kazuki Maeda
２．発表標題 Box-ball systems and biorthogonal polynomials
３．学会等名 CRM Workshop on box-ball systems from integrable systems and probabilistic perspectives（国際学会）
４．発表年 2022年

１．発表者名 前田一貴
２．発表標題 3次方程式に対するNewton法の可積分類似
３．学会等名 可積分系研究の最近の進展 ー理論，シミュレーション，応用ー
４．発表年 2021年

１．発表者名 前田一貴
２．発表標題 代数方程式に対するニュートン法の可積分な類似物
３．学会等名 日本応用数理学会第18回研究部会連合発表会
４．発表年 2022年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関