

令和 6 年 6 月 17 日現在

機関番号：32702

研究種目：若手研究

研究期間：2021～2023

課題番号：21K13841

研究課題名（和文）量子ウォークの二相系における粒子の漸近挙動についての研究

研究課題名（英文）A study for asymptotic behavior of two-phase quantum walks

研究代表者

齋藤 溪（Saito, Kei）

神奈川大学・情報学部・助教

研究者番号：80881119

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,300,000 円

研究成果の概要（和文）：本研究は、サイクルの半周ごとに挙動が異なるサイクルの上を粒子が推移する量子ウォークを扱う、有限次元における量子ウォークの二相系についての研究である。その長時間平均分布を解析することにより粒子の漸近挙動を明らかにすることが目的である。そのために、量子ウォークのスペクトル写像定理を用いる。これは、量子ウォークの時間発展を記述する作用素のスペクトルを分類し、より低次元の自己共役作用素の解析から求めることを可能にする定理である。本研究の成果は、この定理の一般化に成功し、より広いクラスのモデルについて、長時間平均分布から無限次元における局在化と対応するだろう現象を引き起こす条件を明らかにしたことである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

先行研究においては、数値計算により、有限次元版の束縛状態ともいえる、境界上に粒子が高い密度で現れる状態の存在が示唆されていたが、本研究により、これが発生の固有空間に起因することを証明した。さらに、量子ウォークのダイナミクスを定めるパラメータについて、発生の固有空間が存在するための条件を明らかにした。また、束縛状態は多様な概形を持つことがわかった。境界上に粒子が存在する確率が、他の場所に比較し大きくなる場合もあれば、小さくなる場合もある。この性質は量子探索など有限次元上の応用的研究においてはよく見られるものであり、今後、トポロジカル絶縁体の理論検証へと進展するうえで非常に重要な情報である。

研究成果の概要（英文）：This study considers two-phase quantum walks in finite dimensions, i.e., the behavior of the model differs at each half cycle. The purpose is to clarify the asymptotic behavior of the particles by analyzing their long-time average distribution. To this end, we use the spectral mapping theorem for quantum walks, which allows us to classify the spectrum of operators describing the time evolution of quantum walks and to obtain it from the analysis of lower dimensional self-adjoint operators. The results of this study are the successful generalization of this theorem and the identification of the conditions for the occurrence of phenomena that would correspond to localization in infinite dimension for a broader class of models.

研究分野：応用数学

キーワード：量子ウォーク

#### 1. 研究開始当初の背景

量子ウォークは粒子が空間上を推移するランダムウォークの量子版であり、種々の物理現象を記述することができる数理モデルとして近年注目を浴びている。光合成や超電導体、そして本研究とも密接にかかわるトポロジカル絶縁体もその一つであった。

本研究にて扱う量子ウォークモデルは、有限次元上の二相系と呼ばれるモデルであり、サイクルの頂点上を粒子が推移するが、その半周ごとに挙動が異なるというものである。サイクル上の量子ウォークは各頂点に与えられた二次複素ベクトルである確率振幅に対し、あるユニタリ行列の直交射影により定められる三種の行列をかけることで、左右へ移動、あるいは自身に留まるという時間発展が各時間に行われる。すなわち、本研究で扱う二相系は、この行列がサイクルの半周ごとに異なるというモデルである。なお、確率分布については確率振幅のユークリッドノルムによって定義される。二相系はトポロジカル絶縁体に関する理論予測を検証する絶好のモデルであると知られており、本研究における解析結果により技術的な応用までも期待できる。サイクルではなく数直線上で定義される一次元無限系の量子ウォークの二相系では、局在化と呼ばれる、長時間経過したのちも出発点に留まり続ける確率が存在するという特殊な性質を有することが知られており、それが生じることと、バルクエッジ対応に関連があることが研究されている。なお、有限次元における先行研究においては、数値計算的に量子ウォークの性質が調べられていただけであり、多くの課題が残されていた。これに対し、量子ウォークのスペクトル写像定理を用いることにより、より低次元の自己共役作用素の解析を通して、系の時間発展作用素の固有値・固有ベクトルを明らかにすれば、残されていた課題を数学的な解決へと導くことができると考えた。特に、将来的にトポロジカル絶縁体の理論検証などへの応用を目論むのならば、先行研究のモデルにパラメーターを付与して拡張することは重要であり、本研究の方針はそれをも可能としていた。研究開始当初の状況としては、粒子の漸近挙動のシミュレーションを実施していた状況であり、その結果としてサイクルの半周ごとにピラミッド状の線型的な確率分布が確認されることや、それと合わせて一様に近い分布が現れることが示唆されていた。なお、このような分布を持つ量子ウォークは過去に見られておらず、現在においても同様である。

#### 2. 研究の目的

本研究では先に述べた有限次元上での量子ウォークの二相系を扱い、特に、漸近挙動、すなわち長時間平均分布を解析することによって、先行研究にて残されたいくつかの問題を解き明かすことを目的としていた。特に、先行研究では有限次元系における局在化とでもいえる現象を数値計算によるシミュレーションによって示唆していたが、それはいかなる状況下によって生じるのか、また、それは量子ウォークの初期状態との関係がどうなっているのかを明らかにすることが大きな目的の一つであった。

#### 3. 研究の方法

一般に、量子ウォークの長時間挙動を解析する上で、無限次元を扱う場合よりも有限次元のモデルを扱う場合の方が圧倒的に難しい。その理由は、長時間平均が時間発展作用素の固有値によって記述されることに起因する。無限次元の場合は、この作用がスペクトルの大半が連続スペクトルとなり、二相系の場合は固有値の数は高が知れている。それに対し、有限次元においてはスペクトルのすべてが固有値により構成されることで、長時間平均を記述する数式の計算は非常に困難となる。

それに加え、二相系のような空間に非一様な挙動をふるまうモデルの固有値解析は、典型的な手法のいくつかが使用できない。そのため、本研究では量子ウォークのスペクトル写像定理と呼ばれる手法を用いることで、解析を行った。この定理は、時間発展作用素の固有値および固有空間を分別する定理であり、さらには、この作用素の固有空間の大半が、より低次元のヒルベルト空間上に定義される自己共役作用素により記述されることを示した定理である。特に、あるクラスの量子ウォークにおいては、その時間発展作用素のスペクトルの大半が、同一グラフ上の対称ランダムウォークの確率推移行列のそれにより導かれることが知られているなど、古典系と量子系を繋ぐうえでも非常に有意義な定理であるといえる。このような自己共役作用素によって記述される固有空間を遺伝の固有空間といい、それ以外の固有空間については発生の固有空間という。

#### 4. 研究成果

まず、研究開始当初の段階にて、特別なパラメーターを与えた場合についての解析は成功している。すなわち、上述のスペクトル写像定理における自己共役作用素を解析し、その結果、量子ウォークの固有値・固有ベクトルを求めている。この場合における長時間平均分布は第二種チェブシェフ多項式によって定式化されることも示した。また、発生の固有空間についての解析も終わらせており、その結果として、このクラスにおいては時間発展作用素の $\pm 1$ -固有値こそが、有限次元版の局在化というべき現象を引き起こしていることが判明していた。さらに、これに対応

する固有空間が存在するための必要十分条件の導出することにも成功している．  
したがって，次のマイルストーンとして解析可能なクラスの拡張と，その場合における長時間平均分布の導出が課題となっていた．そのため，スペクトル写像定理の拡張に着手し，その結果として当初予定していたモデルよりも遥かに広いクラスの量子ウォークに適用可能な一般化された定理を獲得するに至った．これに伴い研究対象を大幅に拡張し，その固有値解析を進展させる中で，磁場付きシュレディンガー方程式との関りが背景にあることがわかるなど，更なる発展が見込まれるという成果が得られた．

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1．発表者名 齋藤 溪
2．発表標題 グラフ構造に依存する量子ウォークの固有値解析
3．学会等名 2023年度応用数学合同研究集会
4．発表年 2023年

1．発表者名 齋藤 溪
2．発表標題 Spectral mapping theorem for quantum walks on graphs
3．学会等名 10th International Congress on Industrial and Applied Mathematics
4．発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------