

令和 6 年 4 月 12 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究

研究期間：2021～2023

課題番号：21K13848

研究課題名（和文）確率的な制御誤差が量子アニーリングの性能に与える影響の評価

研究課題名（英文）Evaluation of the effect of stochastic control errors on the performance of quantum annealing

研究代表者

奥山 真佳（Okuyama, Manaka）

東北大学・情報科学研究科・助教

研究者番号：60844321

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究ではハミルトニアンに確率的に生じる制御誤差をシュレディンガー方程式における確率ノイズとして定式化することにより、確率微分方程式の解析を通じて、確率的な制御誤差が量子アニーリングの効率にどのような影響を及ぼすかを解明することを目指した。

(i) 確率的な制御誤差が存在するシュレディンガー方程式において、目的の状態を得るために必要な測定回数と制御誤差の強さの間に成立する閾値定理を示した。

(ii) 確率的なノイズが存在する2準位系のシュレディンガー方程式の時間発展の厳密解をレプリカ法により求めた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

量子アニーリングは孤立量子系の時間発展を計算に利用する。孤立量子系の時間発展は理想的にはシュレディンガー方程式によって記述されるが、現実の実験系では外界の影響を完全に排除することは難しい。外界が孤立量子系に与える影響として、これまでの先行研究では熱浴との相互作用や決定論的に生じるハミルトニアンの制御誤差のみが議論されてきた。しかし、ハミルトニアンには確率的に生じる誤差も存在する。そこで、本研究では確率的に生じる制御誤差をシュレディンガー方程式における確率ノイズとして定式化し、確率微分方程式の解析を通じて、確率的な制御誤差が量子アニーリングの効率にどのような影響を及ぼすかを明らかにした。

研究成果の概要（英文）：In this project, we formulated stochastic control errors in the Hamiltonian as stochastic noise in the Schrodinger equation, and through the analysis of stochastic differential equations, we aimed to clarify how stochastic control errors affect the efficiency of quantum annealing.

(i) In the Schrodinger equation with stochastic control errors, we establish a threshold theorem that provides a sufficient condition to obtain the target state, which should be determined in noiseless isolated quantum dynamics, as a relation between the number of measurements and noise strength.

(ii) The exact solution of the time evolution of the Schrodinger equation for a two-level system in the presence of stochastic noise is obtained by the replica method.

研究分野：統計物理

キーワード：量子アニーリング 断熱定理 確率微分方程式 動的量子相転移 スピングラス 西森線

## 1. 研究開始当初の背景

東京工業大学の西森秀稔氏らによって提案された量子アニーリングは、量子揺らぎを巧みに制御することにより、組合せ最適化問題を効率よく解くことを主目的とする。興味深いことに、任意の量子揺らぎを許して断熱時間発展を考えたとき、量子アニーリングの計算能力は量子回路モデルと等価であることが知られており、量子アニーリングは量子計算の一種としても多くの関心を集めている。しかし、量子回路モデルでは誤り訂正理論が確立しているのに対して、量子アニーリングでは誤り訂正理論が未だに確立しておらず、エラーが量子アニーリングの効率に及ぼす影響を系統的に評価することは非常に重要な問題である。

量子アニーリングでは解きたい問題をイジングハミルトニアンにマッピングし、孤立量子系の時間発展を利用することにより問題を解く。孤立量子系の時間発展は理想的にはシュレディンガー方程式によって記述されるが、現実の実験系では外界の影響を完全に排除することは非常に難しい。外界が孤立量子系に与える影響は主に二つの要因が考えられる。一つ目の要因は熱浴と孤立量子系の相互作用であり、ボソンとスピンの相互作用として記述され、量子アニーリングにおいてもこれまでに多くの研究が行われている。もう一つの要因はハミルトニアン相互作用や磁場などのパラメータの制御に生じる誤差である。ミクロの世界ではハミルトニアンを誤差なしに制御するのは容易なことではなく、それゆえ、ハミルトニアン制御誤差が量子アニーリングの効率に与える影響を調べることは量子アニーリングの実験系での性能を評価する上で重要な問題である。

これまでの量子アニーリングの研究では制御誤差として、時間発展と同程度の時間スケールで変化するノイズのみを扱ってきた。このようなノイズは決定論的に生じるノイズに対応し、通常のシュレディンガー方程式を通じて解析がなされている。しかし、制御誤差としては時間発展よりも早い時間スケールで変化するノイズの影響も存在する。このようなノイズは確率的に生じるノイズに対応する。誤り訂正理論の確立していない量子アニーリングでは、考えられうる全てのエラーの影響を検討する必要がある、それゆえ、「確率的な制御誤差が量子アニーリングの効率に与える影響はどのようなものであるか」を理解することも非常に重要な問題であるが、これまでに研究が全く行われていなかった。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、ハミルトニアン確率的な制御誤差が量子アニーリングの性能に与える影響を理解するための土台を構築することである。これまでの量子アニーリングの研究では時間発展の時間スケールと同程度の早さで変化する決定論的な制御誤差のみが扱われてきた。

## 3. 研究の方法

本研究では、確率的な制御誤差をシュレディンガー方程式における確率ノイズとして定式化することにより、確率微分方程式の手法を用いて量子アニーリングの確率的な制御誤差に対する性能評価を行った。

## 4. 研究成果

- (1) 確率ノイズが存在する任意の孤立量子系のダイナミクスに対して、計算時間と確率ノイズの強度が与えられた時に、目的の状態を得るための測定回数を与える閾値定理を確立した [文献 1]。得られた閾値定理を簡潔に述べると、確率ノイズありの時間発展において目的の状態を得るために必要な測定回数が確率ノイズなしの時間発展と同じ程度になるためには、計算時間  $T$  と全てのノイズの強度の総和  $G$  の間に次の関係が成立すれば十分である。

$$TG = O(1)$$

要するに、ノイズの強度が計算時間の逆数に比例するならば、量子アニーリングの効率は確率ノイズの影響を受けないことを意味している。

[文献 1] M. Okuyama, K. Ohki, and M. Ohzeki, *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 381, 20210412 (2023).

上記の閾値定理は任意の孤立量子系の時間発展に対して適用可能な結果であるが、言い換えれば系固有の性質を全く用いていない議論でもある。量子アニーリングでは、断熱時間発展を用いることにより基底状態から励起状態への非断熱遷移を抑制する。したがって、他の時間発展と比較して、断熱時間発展は確率ノイズに対してもロバストであることが期待される。そこで、確率微分方程式において、断熱定理の対応物を導出することを試みたが、残念ながらこの方針は成功していない。

- (2) 確率ノイズのあるシュレディンガー方程式の具体例として、2準位系のシュレディンガー方程式に確率ノイズが加わったモデルと等価である、 $2 \times 2$ 行列値幾何ブラウン運動の厳密解を得た[文献2]。幾何ブラウン運動は非常に有名な確率微分方程式の一つであり、厳密に解ける数少ない確率微分方程式でもある。しかし、幾何ブラウン運動を多成分に拡張した行列値幾何ブラウン運動の厳密解はこれまで得ることはできないと考えられていた。これに対して、統計物理学におけるスピングラスモデルの解析において発展してきたレプリカ法を適用し、行列値幾何ブラウン運動の時間発展演算子を平均場量子スピン系的一种である Lipkin-Meshkov-Glick 模型の分配関数にマッピングした。さらに、Lipkin-Meshkov-Glick 模型の分配関数を解析することにより、行列値幾何ブラウン運動の様々な量の厳密解を得ることに成功した。

[文献2] M. Okuyama and M. Ohzeki, Journal of the Physical Society of Japan 92, 114001 (2023).

さらに、この解析方法を発展させることにより、確率ノイズの存在する平均場量子スピン系のシュレディンガー方程式において、動的量子相転移の解析を行った。これについては現在論文を執筆中である。

- (3) また、当初の予定とは異なるが、確率微分方程式の時間発展演算子と見なすことができるスピングラスモデルの厳密な解析を行った。特に、強磁性モデルにおいて知られていた様々な厳密な結果の対応物を西森線上のスピングラスモデルに対して拡張することに成功した[文献3、文献4]。

[文献3] M. Okuyama and M. Ohzeki, Journal of the Physical Society of Japan 92, 084002 (2023).

[文献4] M. Okuyama and M. Ohzeki, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 56, 325003 (2023).

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Okuyama Manaka, Ohki Kentaro, Ohzeki Masayuki	4. 巻 381
2. 論文標題 Threshold theorem in isolated quantum dynamics with stochastic control errors	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences	6. 最初と最後の頁 1-7
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1098/rsta.2021.0412	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Okuyama Manaka, Ohzeki Masayuki	4. 巻 92
2. 論文標題 Gibbs-Bogoliubov Inequality on the Nishimori Line	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of the Physical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 1-4
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.7566/JPSJ.92.084002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Okuyama Manaka, Ohzeki Masayuki	4. 巻 56
2. 論文標題 Mean-field theory is exact for Ising spin glass models with Kac potential in non-additive limit on Nishimori line	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 325003 ~ 325003
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1751-8121/ace6e4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Okuyama Manaka, Ohzeki Masayuki	4. 巻 92
2. 論文標題 Exact Solution of Free Entropy for Matrix-Valued Geometric Brownian Motion with Non-Commutative Matrices via Replica Method	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of the Physical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 1-7
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.7566/JPSJ.92.114001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 奥山真佳、大関真之
2. 発表標題 西森ライン上のGibbs-Bogoliubov不等式
3. 学会等名 日本物理学会2022年秋季大会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 奥山真佳、大関真之
2. 発表標題 西森ライン上における非加法的長距離相互作用イジングスピングラス模型とSK模型の自由エネルギーの等価性の証明
3. 学会等名 日本物理学会2023年春季大会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 奥山真佳、大関真之
2. 発表標題 平均場模型と密な希釈平均場模型の自由エネルギーの等価性の証明
3. 学会等名 日本物理学会第78回年次大会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 奥山真佳、大関真之
2. 発表標題 レプリカ法を通して見る行列値幾何ブラウン運動と平均場量子スピン系の関係
3. 学会等名 第4回量子技術ワークショップ（招待講演）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Manaka Okuyama, Masayuki Ohzeki
2. 発表標題 Mean-field theory is exact for Ising spin glass models with Kac potential in non-additive limit on Nishimori line
3. 学会等名 28th International Conference on Statistical Physics, Statphys28 (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------