

令和 6 年 5 月 4 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2021～2023

課題番号：21K18575

研究課題名（和文）非可換代数幾何学を用いた可積分系の研究

研究課題名（英文）Study of integrable system using noncommutative algebraic geometry

研究代表者

植田 一石（Ueda, Kazushi）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：60432465

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 5,000,000円

研究成果の概要（和文）：標識付き非可換3次曲面のコンパクトなモジュライ空間を箭の関係式のモジュライ空間の幾何学的不変式論的なコンパクト化として定義し、それが8次元の射影的トーリック多様体であって、射影平面上の一般の6点の配置空間を余次元4の局所閉部分多様体として含んでいる事を証明した。また、あるクラスのBrieskorn-Pham特異点のMilnorファイバーに対して、巻深谷圏やRabinowitz深谷圏を適当な群作用に関する同変行列因子化の圏と同定するホモロジー的ミラー予想や、深谷圏のHochschildコホモロジーとシンプレクティックコホモロジーが同型であるというSeidelの予想を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非可換射影平面と非可換2次曲面の概念はArtin-Tate-Van den BerghとVan den Berghによって1990年と2011年に出版された論文で確立されたが、我々の結果は非可換3次曲面やより一般の非可換del Pezzo曲面の概念を確立するものであり、今後の発展の基礎となる重要なものである。また、Milnorファイバーの巻深谷圏やRabinowitz深谷圏に対するホモロジー的ミラー対称性は、有限次元代数の表現論や団代数の理論など、数学の他の分野とも関係が深い。

研究成果の概要（英文）：We defined a compact moduli space of marked noncommutative cubic surfaces as a geometric invariant theoretic compactification of the moduli space of relations of a quiver, and proved that it is an eight-dimensional toric variety containing the configuration space of six points in general position on the projective plane. We also proved homological mirror symmetry for wrapped Fukaya categories and Rabinowitz Fukaya categories of Milnor fibers of a class of Brieskorn-Pham singularities. We proved a conjecture of Seidel on the isomorphism of the Hochschild cohomologies of the Fukaya categories and symplectic cohomologies for the same class of Brieskorn-Pham singularities along the way.

研究分野：幾何学

キーワード：非可換代数幾何学 モジュライ空間 ホモロジー的ミラー対称性

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

代数幾何学と可積分系はともに長い歴史を持ち、それらの間には様々な関係が知られている。一方、非可換代数幾何学は、代数幾何学と可換環の関係を非可換環に拡張することによって、代数多様体の概念を量子化することを目指す、比較的新しい分野である。非可換代数多様体は集合ではなく圏であり、代数多様体の上の接続層のなす Abel 圏や、その導来圏として得られる微分次数圏の一般化を与える。非可換代数幾何学の源流の一つとして量子逆散乱法や Yang-Baxter 方程式があり、非可換代数幾何学で最も深く研究されている楕円量子平面の非可換座標環である 3 次元 Sklyanin 代数はここに由来する。

2. 研究の目的

上記の背景を踏まえると、非可換代数幾何学と量子可積分系の関係を追求することは極めて自然な問題である。しかし、本研究の目的はより挑戦的なものであり、そのような素朴な関係を越えて、非可換代数幾何学における力学系やその可積分性の概念や、その応用を追求することを目指した。

3. 研究の方法

本研究では、上記の研究の目標を達成するために、研究代表者がこれまでに研究してきたホモロジー的ミラー対称性やそれに関連する概念を駆使しつつ、国内外の様々な研究者と協力して研究を行った。

4. 研究成果

Imperial College London の Yanki Lekili 氏と共同で、ホモロジー的ミラー対称性に関する研究を行った。特に、Lekili 氏と共同で定式化した、可逆多項式の Milnor ファイバーの巻深谷圏を、転置多項式に全ての変数の積として与えられる単項式を加えて得られる多項式の次数付き行列因子化の圏と同定する予想を、任意の正の自然数 n に対する n 変数 n 次 Fermat 多項式に対して証明した。証明の鍵になっているのは、与えられた次数代数に入る A -infinity 構造のモジュライ空間と、深谷圏と巻深谷圏の間にある Koszul 双対性である。さらに、証明の過程で、深谷圏の Hochschild コホモロジーとシンプレクティックコホモロジーが同型であることも示した。これによって、2017 年に研究集会で発表し、2018 年に最初のプレプリントを公表してから、数年に渡って改良に取り組んできた課題の一つの区切りつけることができた。本研究の研究期間における進展のうちで最も重要なものは、適当な仮定の下で深谷圏の Hochschild コホモロジーとシンプレクティックコホモロジーが同型であるという Seidel の予想を、Brieskorn-Pham 特異点の Milnor ファイバーに対して証明したことである。この予想は、コンパクトなシンプレクティック多様体における Hochschild コホモロジーと量子コホモロジーの同型の開シンプレクティック多様体に対する類似物として、2002 年の国際数学会議で提出された重要なものである。巻深谷圏の Hochschild コホモロジーが適当な仮定の下でシンプレクティックコホモロジーと同型になることは既に知られていたもので、深谷圏の Hochschild コホモロジーと巻深谷圏の Hochschild コホモロジーの同型を示すことが問題となる。我々は、0 でない整数によるコホモロジー的度数の偏移が球状対象による捻関手の適当な合成と同型になるような微分次数圏は、球状対象の生成する充滿部分圏の余極限に関する完備化への充滿忠実関手を持ち、これらの圏の Hochschild コホモロジーが同型になるという一般的な事実を証明し、それを用いて問題の同型を示した。

ホモロジー的ミラー対称性に関するこの研究は、次のようにして、非可換代数幾何学における新しい力学系の概念を導入する動機を与えた。

Liouville-Arnold の定理により、コンパクトなシンプレクティック多様体上の完全可積分系は Lagrange トーラスファイブレーションとほぼ同値な概念である。これは、底空間について局所的には、半分次元のトーラスの Hamilton 作用と言い換えることもできる。この作用はシンプレクティック多様体の Lagrange 部分多様体のなす深谷圏へのトーラスの位相的な作用を引き起こす。Teleman によって、無限圏への位相群の位相的な作用は、位相群の基点付きループ空間上の鎖のなす E_2 代数から、圏の Hochschild 余鎖複体のなす E_2 代数への準同型と同定される。トーラスの基点付きループ空間は自由 Abel 群なので、トーラスの無限圏への位相的な作用を与えることは、Hochschild 余鎖複体の可逆元の組を与えることと同値である。この可逆元は、Hochschild コホモロジーと量子コホモロジーの同型を通して、量子コホモロジーの Seidel 元を

与える。ホモロジー的ミラー対称性は、あるシンプレクティック多様体の深谷圏と別の（一般には非可換な）代数多様体（あるいは（非 Archimedes 的）解析多様体）上の接続層の導来圏の間の同値を与えることから、与えられた非可換代数多様体に対し、その Hochschild 余鎖複体の可逆元を力学系とみなして研究するという観点に至る。非可換代数幾何学における力学系の研究としては、Dimitrov-Haiden-Katzarkov-Kontsevich に現れるように、無限圏の自己同値を力学系とみなして研究するという立場もあり得るが、自己同値はある圏からそれ自身への可逆な自己関手であるのに対し、ある圏の Hochschild 余鎖複体の可逆元は、恒等関手からシフト関手への可逆な自然変換であるので、これらの2つの概念は異なる圏論的次元を持つ。

非可換代数多様体の Hochschild 余鎖複体の可逆元を力学系とみなして研究するには、Hochschild 余鎖複体が可逆元を持つような非可換代数多様体の構成が重要になる。ところが、例えば滑らかで連結な射影多様体の Hochschild コホモロジーの次数は0から次元までに集中していて、しかも0次の Hochschild コホモロジーは基礎体と同型になるので、そのような多様体を非可換変形しても一般には自明な例しか作れない。一方、Brieskorn-Pham 特異点に対して、モノドロミーから来る Milnor ファイバーの巻深谷圏の自己同値は座標環の Gorenstein パラメーターによるシフトになり、コンパクト化の境界を通る概正則円板の数え上げによって定義されるシンプレクティックコホモロジーの元 (Borman-Sheridan 類) は恒等関手からモノドロミー関手への自然変換を与える。Milnor ファイバーが対数的 Calabi-Yau でない時、この自然変換によって巻深谷圏を局所化したものは Rabinowitz 深谷圏になることが、Rabinowitz 深谷圏に関する既知の結果と Brieskorn-Pham 特異点の Milnor ファイバーに対するホモロジー的ミラー対称性を組み合わせることによって示される。その系として、Brieskorn-Pham 特異点の Milnor ファイバーの Rabinowitz フレアコホモロジーを計算するアルゴリズムが得られる。こうして得られる Rabinowitz 深谷圏上の非可換力学系は、Milnor ファイバーの接触境界の持つ円周の作用から来ると期待される。自然変換で局所化して非可換力学系を得る操作は、ミラー側で見ると、同変行列因子化の圏を局所化することによって群を取り替えていることに対応する。また、この操作は、Serre 関手のシフトに関する軌道圏を取ることによって圏を作る操作の例にもなっている。さらに、結果として得られる非可換力学系は、同変行列因子化の圏の周期性を与える。これらの事実は、Hochschild 余鎖複体の可逆元として定義された非可換力学系の概念が興味深くかつ重要であることを示している。

また、上記の研究と関連して、K3 曲面の豊富かつ滑らかな因子の補集合として得られる Stein 多様体に対するホモロジー的ミラー予想を定式化し、因子の次数が2または4の場合に証明した。この場合のミラーは、K3 曲面の III 型退化として得られる代数多様体である。これは2次元球面の3角形分割を双対交叉複体に持つ特異曲面であり、各既約成分は有効な反標準サイクルを持つ有理曲面になっている。次数と呼ばれる偶数と、指数と呼ばれる整数を固定すると、球面の三角形分割はある種の変換を除いて一通りに決まり、そこから K3 曲面の III 型退化が変形と導来同値を除いて定まる。我々の予想するミラーはこの変形同値類の中のある具体的に指定された元である。証明は、Brieskorn-Pham 特異点の Milnor ファイバーに対するホモロジー的ミラー対称性と McKay 対応を組み合わせることによってなされる。

これらと大きく異なる方向の研究として、英国 Loughborough 大学の Tarig Abdelgadir 氏および大阪大学の大川新之介氏と共同で、標識付き非可換3次元曲面のモジュライ空間のコンパクト化を、鏡の関係式のモジュライ空間の幾何学的不変式論的なコンパクト化として定義し、それが8次元の射影的トーリック多様体であって、射影平面上の6点の配置空間を余次元4の局所閉部分多様体として含んでいる事を示したプレプリントを公表した。これも長年に渡って取り組んできた問題に対して一つの区切りをつける結果であるが、非可換3次元曲面のより精密な分類やモジュライ空間へのアフライン Weyl 群の作用、一般の del Pezzo 曲面への拡張、Hilbert スキームに代表される層のモジュライ空間の研究など、追求すべき興味深い課題が山積している。

また、Tarig Abdelgadir 氏、大川新之介氏および豪州 New South Wales 大学の Daniel Chan 氏と共同で、軌道体射影曲線というクラスのスタックに対して安定性の概念を導入し、安定軌道体射影曲線のモジュライスタックが Hassett の意味で安定な重み付けられた点付き曲線のモジュライスタックと同型になることを示した。また、軌道体射影曲線の退化を非可換代数幾何（あるいは Abel 圏）の観点から考察し、安定化部分群を持つ点が衝突する極限として、特異点を持つ軌道体ではなく、滑らかな非可換代数曲線（つまり、有限なホモロジー次元を持つ Abel 圏）が得られることも示した。

さらに、2次の Gorenstein K3 曲面が持ち得る D4 特異点の個数の最大値は4であり、4つの D₄ 特異点を持つ K3 曲面のモジュライ空間は直交群に関するモジュラー多様体になるが、このモジュライ空間を具体的に記述し、対応する保型形式環の生成元の次数と関係式を決定した。これは橋本健治氏との共同研究として始まったが、橋本氏が著者に加わることを辞退したので、単著として公表した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 NAGANO Atsuhira, UEDA Kazushi	4. 巻 51
2. 論文標題 The ring of modular forms of $\mathbb{Z}(2,4;\mathbb{Z})$ with characters	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 275 ~ 286
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14492/hokmj/2020-355	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Lekili Yanki, Ueda Kazushi	4. 巻 15
2. 論文標題 Homological mirror symmetry for Milnor fibers via moduli of A \mathbb{A}_∞ structures	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Topology	6. 最初と最後の頁 1058 ~ 1106
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/topo.12248	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Lekili Yanki, Ueda Kazushi	4. 巻 8
2. 論文標題 Homological mirror symmetry for Milnor fibers of simple singularities	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Algebraic Geometry	6. 最初と最後の頁 562 ~ 586
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14231/AG-2021-017	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Hashimoto Kenji, Ueda Kazushi	4. 巻 150
2. 論文標題 The ring of modular forms for the even unimodular lattice of signature (2,10)	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 547 ~ 558
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/15667	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nagano Atsuhira, Ueda Kazushi	4. 巻 52
2. 論文標題 The ring of modular forms for the even unimodular lattice of signature (2,18)	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Hiroshima Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 43~51
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.32917/h2021012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 Kazushi Ueda
2. 発表標題 Homological mirror symmetry and elliptic fibrations
3. 学会等名 QSMS workshop on symplectic geometry and related topics, Jeju, Korea (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Kazushi Ueda
2. 発表標題 Stable Fukaya categories of Milnor fibers
3. 学会等名 QSMS workshop on symplectic geometry and related topics, Jeju, Korea (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Kazushi Ueda
2. 発表標題 Stable Fukaya categories of Milnor fibers
3. 学会等名 Geometry of GLSMs, University of Birmingham, UK (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kazushi Ueda
2. 発表標題 Noncommutative local Calabi-Yau 3-folds
3. 学会等名 UNIST International Workshop on Geometry and Mathematical Physics 2022, Ulsan National Institute of Science and Technology (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

https://researchmap.jp/uedakazushi/

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------