様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月　６ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：挑戦的研究（萌芽）
研究期間：2021～2023
課題番号：２１Ｋ１８５８７

研究課題名（和文）空間の分割と重みからの解析学の構築

研究課題名（英文）Construction of analysis via partitions and weights of spaces

研究代表者
木上　淳（KIGAMI，JUN）

京都大学・情報学研究科・教授

研究者番号：９０２０２０３５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　4,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では微分という概念が適用できない複雑な空間上で解析学を展開するための基礎としての(1, p)-Sobolev空間とp-energyの構成を、空間を離散的なグラフの列で近似し、そのグラフの上のp-energyのスケーリング極限を考えるという発想の元に行った。そして、適切なスケーリング定数が存在するための条件としてp-conductive homogeneityという概念を提唱し、この性質の元で空間上に (1, p)-Sobolev空間とp-energyに相当する物が構成できることを示した。とくにp=2の場合には空間上に自然な拡散過程を構成することに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
この研究で考察の対象となる空間はフラクタルなどの複雑な空間である。フラクタルはマンデルブローにより自然界の物体の適切なモデルとして提唱された。従来のユークリッド空間や可微分多様などの滑らかな空間をモデルとした物理学ではその上の物理現象は微分を用いて記述されるが、フラクタルなどの複雑な形状を持つ空間では微分を定義することが出来ない。すなわち、フラクタルをモデルとした物体上の物理現象を記述するためには、「微分を用いない解析学」の構築が必要となる。本研究はそのような微分が定義できないような複雑な空間上での解析学の基礎の確立を目指している。

研究成果の概要（英文）：In this study, we tried to construct a counterpart of (1, p)-Sobolev spaces on metric spaces via a scaling of discrete p-energies on discrete graphs approximating the original metric space. Note that we can not use the notion of derivation on complex metric spaces like fractals. In conclusion, we establish the notion of p-conductive homogeneity under which we have a proper scaling constant of discrete p-energies and as a consequence, we obtain a counterpart of (1, p)-Sobolev spaces and p-energies. In particular, in the case p = 2, we succeed to construct a natural diffusion process on the metric space.

研究分野：複雑な空間上の解析学

キーワード：距離空間　空間の分割　フラクタル　グラフ近似　ソボレフ空間

様 式　Ｃ－１９, Ｆ－１９, Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

フラクタル上の解析学の研究を通じて、ユークリッド空間やリーマン多様体（smooth な空間と呼ぶ）では一致していた幾何学的な指数（次元）とラプラシアンの固有値分布や熱核の漸近挙動に表れる解析学的な指数の乖離が明らかとなった。このような乖離を理解するため研究代表者は「フラクタルの解析では漸近挙動等を記述するのに適切な距離は、その空間の "自然と考えられていた距離" とは異なるのでは？」という発想を得た。この発想に基づいて、研究代表者は自己相似集合上の自己相似的な拡散過程の場合、resistance form から導かれる拡散過程の場合、Sierpinski carpet 上の Brown 運動の時間変更の場合について、拡散過程を記述するのに適した距離の構成について研究を行ってきた。そして、その延長線上で

(a) 与えられた空間上に、どんな距離が、どれぐらいあるか？

(b) それを決定する空間の "構造" は何か？

(c) そしてその空間の "構造" から「いつ」・「どのようにして」解析が構築できるのか？

という興味をもった。そして「空間の構造」として細分を繰り返してできる空間の被覆の列とそれら被覆を構成する部分集合達のつながり方に対応する「分割」という概念を、さらに空間上の「距離」「測度」に対応する概念として分割上の「重み」を導入し、主に (a), (b) の問題について研究を行っていた。特に、重みから距離を構成する方法を得て、その応用として、分割上の関数の p-energy の臨界指数と空間の Ahlfors regular conformal 次元が一致することを証明した。この結果から、上記 (c) の問題に関して、「離散的な p-energy の適切なスケーリング極限で、ユークリッド空間の場合には関数 u の gradient ∇u のノルムの p 乗積分で定義される p-energy に相当するノルムと、(1, p)-Sobolev 空間 に相当する関数空間が構成できる。」という本研究の核心となる予想を得るに至っていた。

２．研究の目的

ユークリッド空間や可微分多様体上では p-energy と L^p-ノルムの和をノルムとする Sobolev 空間 $W^{1,p}$ が定義され、それらを基盤として、付随する p-ラプラシアンや Sobolev 不等式、Sobolev の埋め込み定理など、解析の基本となる豊富な概念が生み出されている。その拡張としては、Cheeger-Heinonen らによる Poincare 不等式を満たす距離空間上の Sobolev 空間の理論がある。しかしながら、Sierpinski gasket や Sierpinski carpet などのフラクタル上では、この理論の前提となる Poincare 不等式は成立しない。本研究の目的は、最近研究代表者によって導入された「空間の分割と重み」の理論を足掛かりにフラクタルを含む距離空間上に p-energy と Sobolev 空間 (に相当するもの）を構成し、距離空間上の解析学の基盤を築くことである。

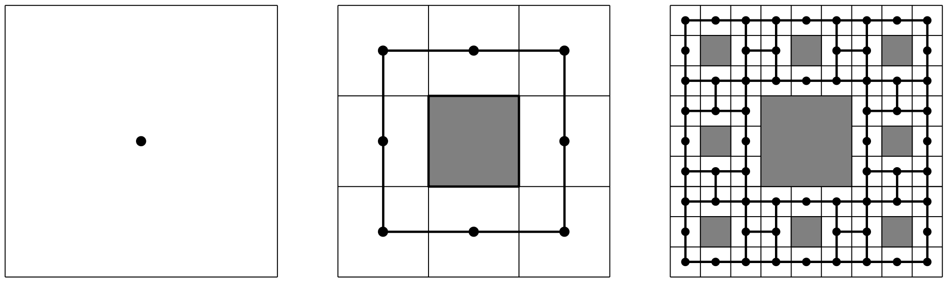
３．研究の方法

本研究の方法の鍵となるのは、

J. Kigami, Geometry and Analysis on Metric Spaces via Weighted Partitions, Lecture Notes in Math., vol 2265, Springer, 2020

で提唱された「空間の分割と重み」の概念である。「分割」とは手短に言えば、空間を細分していく被覆の列から作られる、空間を近似するグラフの無限列 $\{(V_m, E_m)\}_{m\geq 0}$ である。(図１: Sierpinski carpet の場合の例) さらに、「空間の分割と重み」の理論では、「距離」と「測度」の概念は、共に分割の頂点達の上の「重み」として統一的な視点から取り扱えることが示されている。

　さて、この空間の分割を用いて p-energy を構成するための本研究の基本的な方法は次の通りである。



(V_0, E_0) (V_1, E_1) (V_2, E_2)

分割から作られるグラフ達 (V_m, E_m)：● は頂点、太線は辺

図 1: Sierpinski carpet: 塗りつぶしの部分を抜いていく

$$\boxed{\text{空間の分割 } (V_m, E_m)} \Longrightarrow \boxed{(V_m, E_m) \text{ 上の離散的な } p\text{-energy } \mathcal{E}_{p,m}}$$

$$\underset{\textbf{ここが最大の難関!!}}{\overset{\text{スケーリング極限}}{\Longrightarrow}} \boxed{\text{空間上の } p\text{-energy } \mathcal{E}_p}$$

ここで、(V_m, E_m) 上の離散的な p-energy $\mathcal{E}_{p,m}$ は $u : V_m \to \mathbb{R}$ に対して、次のように定義される。

$$\mathcal{E}_{p,m}(u) \underset{\text{定義}}{=} \frac{1}{2} \sum_{(x,y)\in E_m} |u(x) - u(y)|^p$$

この方法による研究の最大の懸案は、「スケーリング極限」の部分、すなわち

(P) ある $\lambda > 0$ に対して、十分多くの関数 u で $\lambda^{-m}\mathcal{E}_{p,m}(u)$ が $m \to \infty$ で収束すること

の証明となる。

４．研究成果

本研究の成果は次の 3 つの部分 (1), (2), (3) に分けられる。

(1) 研究の方法に述べた (P) のための条件として p-Conductive homogeneity という概念を提唱したこと

(2) 上記の p-Conductive homogeneity の元で Sobolev 空間 $W^{1,p}$ に相当する関数空間の構成を行ったこと

(3) p-Conductive homogeneity を持つ新しい自己相似集合のクラスを見出したこと

尚、これらの結果は、

J. Kigami, Conductive homogeneity of compact metric spaces and construction of p-energy, Memoirs of European Math. Soc. vol. 5（2023)

で発表されている。次にこの (1), (2), (3) について詳しくのべる。

(1) 上述の p-energy の列 $\mathcal{E}_{p,m}(\cdot)$ から、その p-conductance に相当する指数 $\mathcal{E}_{p,m}$ (conductance constants と呼ぶ）とある種の Poincare 定数に相当する指数 $\sigma_{p,m}$ (neighbor disparity constants と呼ぶ）を導き、これらの指数が、

$$\text{ある定数 } C \text{ に対して任意の } m \geq 1 \text{ で } \mathcal{E}_{p,m}\sigma_{p,m} \leq C$$

を満たすとき、空間が p-conductive homogeneous であると定義した。そして p-conductive homogeneous な空間においては、定数 $\lambda_p > 0$ および $c_1, c_2 > 0$ が存在して、任意の $m \geq 1$ で

$$c_1(\lambda_p)^m \leq \mathcal{E}_{p,m} \leq c_2(\lambda_p)^m \quad \text{かつ} \quad c_1(\lambda_p)^{-m} \leq \sigma_{p,m} \leq c_2(\lambda_p)^m$$

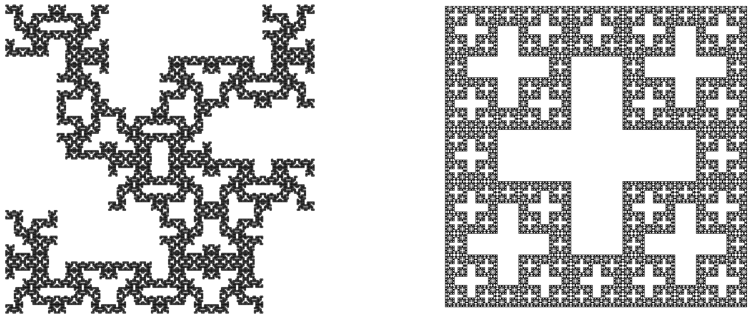


図 2: 正方形を基礎とした自己相似集合の例

が成り立つことを示した。さらに、空間の Ahlfors regular conformal 次元と呼ばれる幾何学的な量 d_{ARC} に対して、

$$\lambda_p < 1 \Leftrightarrow p > d_{ARC}$$

が成り立つことを証明した。この関係は、空間の幾何学的構造と解析的構造の結びつきを表わしている。

(2) 上述の p-conductive homogeneity の元で

$$W^p = \{u | u \text{ は空間上の } p \text{ 乗可積分な関数で } \widetilde{\mathcal{E}}_p(u) = \sup_{m \geq 0} (\lambda_p)^{-m} \mathcal{E}_{p,m}(u) < \infty\}$$

と定義するとき、$p > 1$ で W^p は空間の L^p ノルムと $\widetilde{\mathcal{E}}_p(\cdot)$ の和をノルムとする反射的な Banach 空間であることを示した。更に、$\widetilde{\mathcal{E}}_p(\cdot)$ と同値な W^p のセミノルム $\mathcal{E}_p(\cdot)$ で局所性とマルコフ性を満たすものが存在することを示した。この結果は、W^p が空間の $(1,p)$-Sobolev 空間に相当する関数空間であることと、$\mathcal{E}_p(\cdot)$ が Sobolev 空間に付随する p-energy であることの正当性を保証するものとなっている。つまり、p-conductive homogeneity の元では、Sobolev 空間としての最低限の性質をみたす関数空間が構成できることを示したのである。さらに、空間が自己相似集合の場合には、p-energy $\mathcal{E}_p(\cdot)$ も自己相自性を持つことも示された。それに加えて、空間の Ahlfors regular conformal 次元 d_{ARC} が 2 より小さい場合には、$(\mathcal{E}_2, W^2)$ は局所性を持つ正則 Dirichlet 形式と呼ばれるものになっていることも示した。この結果は、空間上に自然な拡散過程が構成できることを示している。これは、Barlow-Bass および Kusuoka-Zhou による 2 次元 Sierpinski carpet 上への Brownian motion の構成の自然な拡張である。

(3) 与えられた空間が p-conductive homogeneity を持つかどうかの判定について、$p > d_{ARC}$ の場合に、Barlow-Bass が Sierpinski carpet 上に Brownian motion を構成する際に用いた Knight move と呼ばれる性質を一般化したもの（Generalized Knight move condition: 略して GKMC）が、そのための必要十分条件であることを示した。また、GKMC は空間の曲線の族の modulus に関する幾何学的な条件と同値であることを示し、その幾何学的な条件を用いて、正方形を基礎とした自己相似集合（square-based self-similar sets) が、p-conductive homogeneous であるための十分条件を明らかにした。図 2 は、その十分条件を満たし、$p > d_{ARC}$ について p-conductive homogeneity を持つような自己相似集合の例である。この自己相似集合の族は、Sierpinski carpet を含むが、図 2 の例のように必ずしも Sierpinski carpet のように豊富な大域的対称性は持たない。また、これらの例では d_{ARC} は 2 より小さいので、2-conductive homogeneous であることが分かり、自然な拡散過程の構成できることが導かれる。これは、Barlow-Bass および Kusuoka-Zhou による Sierpinski carpet 上への Brownian motion の構成の自然な拡張となっている。

以上 (1), (2), (3) の結果を通して本研究では、フラクラルなどを含む複雑な空間上での解析学の展開に向けた基礎理論を確立することに成功した。フラクタルは本来自然界の物体の形のモデルとして導入されており、本研究は自然界の複雑な形状を持つ物体上での様々な物理現象の解析の基礎をなすものである。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　2件）

１．著者名 Kigami J.、Takahashi K.	４．巻 306
２．論文標題 “The Sierpinski gasket minus its bottom line” as a tree of Sierpinski gaskets	５．発行年 2024年
３．雑誌名 Mathematische Zeitschrift	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00209-023-03416-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Kigami Jun	４．巻 5
２．論文標題 Conductive Homogeneity of Compact Metric Spaces and Construction of p-Energy	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Memoirs of the European Mathematical Society	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/MEMS/5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　4件／うち国際学会　4件）

１．発表者名 J. Kigami
２．発表標題 Yet another construction of "Sobolev spaces" on metric spaces
３．学会等名 Quasiworld workshop（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

１．発表者名 J. Kigami
２．発表標題 Conductive homogeneity of locally symmetric polygon-based self-similar sets
３．学会等名 CIRM workshop "Analysis on fractals and networks, and applications"（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2024年

１．発表者名 J. Kigami
２．発表標題 Construction of Sobolev spaces on metric spaces
３．学会等名 Fractals, quantum graphs and applications in pure and applied sciences（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2024年

１．発表者名 Jun Kigami
２．発表標題 Conductive homogeneity of compace metric spaces and construction of p-energy
３．学会等名 Analysis on Metric spaces（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2022年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関