

令和 5 年 4 月 27 日現在

機関番号：32672

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2021～2022

課題番号：21K20259

研究課題名（和文）数学的探究における定義活動を促進するための教材の開発と検証

研究課題名（英文）Task design for fostering defining in mathematical inquiry

研究代表者

村田 翔吾（Murata, Shogo）

日本体育大学・児童スポーツ教育学部・助教

研究者番号：50909471

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の目的は、生徒が探究に取り組むなかで、定義を構成、洗練していく活動である、数学的探究における定義活動を促進するための教材を開発し、その有効性を検証することであった。この目的を達成するために、事柄の証明と論駁における定義活動、及び数学的概念の拡張における定義活動に焦点を当てたうえで、中学校教諭の協力を得て、教材開発と研究授業を実施し、得られたデータを質的に分析した。分析結果から、実現を期待する活動を促進するにあたって、開発した教材には一定の効果が認められることが明らかとなった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の学術的意義は、事柄の証明と論駁における定義活動及び数学的概念の拡張における定義活動のあり方を理論的に考察したうえで、中学生を対象として、これらの活動を促進するための教材を開発したことである。学校数学において定義は、教科書においてあるいは教師から天下り的に提示されることが多いが、開発した教材は、生徒たちが自分自身で定義を構成したり洗練したりする活動に取り組む機会を提供するものである。それゆえ、本研究の成果は、学校数学における定義のあり方に対して一石を投じた点において社会的意義がある。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this study was to design and validate mathematical tasks that facilitate defining in mathematical inquiry. To achieve this purpose, I focused on two types of defining: one is defining in proofs and refutations, while the other is defining in an expansion of a mathematical concept. Collaborated with junior high school math teachers, we designed tasks that foster students' defining activities in each context and conducted the tasks in the classroom. The qualitative analysis results revealed that the designed tasks had a certain effect to promote students' defining activities.

研究分野：数学教育学

キーワード：数学的探究 定義活動 教材開発 課題設計 デザイン研究 証明と論駁 拡張

1. 研究開始当初の背景

教科教育研究では、生徒が問題解決を通して適切な概念を形成することを実現するために、概念形成と問題解決をいかに両立させるかということが古くから問われてきた。なかでも数学の対象は抽象的・形式的であるため、数学的概念の形成においては、定義 (definition) が重要な役割を果たす。本来定義は、目的に応じて定められる相対的なものであるが、学校数学において定義は、教師から天降的に与えられることが多く、生徒は定義の意義を理解していないこと (教育実践上の課題) が報告されている (中西・國宗, 1983)。この課題を解決するために本研究では、生徒が自分で定義を構成、洗練していく活動である、定義活動 (defining) に着目する。

定義活動に関する先行研究では、何かをするために定義するのではなく、定義すること自体が目的となっていることが多い。例えば、Kobiela & Lehrer (2015) では、授業において教師が突然「多角形とは何か」と尋ねることから定義活動が始まっている。その結果として、生徒は、自分で定義を構成、洗練することに取り組んでいたものの、生徒がどのような文脈において何を目的として活動していたかは不問にされている。したがって、先行研究の課題として、定義活動の文脈や目的が明らかではないこと (学術研究上の課題) が指摘できる。

この学術研究上の課題を解決するために、本研究では、数学の問題に対する解決と批判を繰り返しながら、定義を構成、洗練していく活動である、数学的探究における定義活動を提案する。これにより、定義のための定義ではなく、探究のための定義であることが顕在化され、生徒にとって、定義の意義を実感しやすくなるを考える。この着想の下、応募者は、数学的探究における定義活動のあり方を規定し、その教育的意義を理論的に考察してきた (特別研究員奨励費: 19J10381)。一方で、実際の授業において数学的探究における定義活動を実現するためには、生徒の活動を促進するための教材を開発し、その有効性を検証する必要がある。

2. 研究の目的

以上の背景から、本研究では「授業において数学的探究における定義活動を実現するために有効な教材は何か」という問いを設定した。この問いを解決するために、本研究では、数学的探究における定義活動を促進するための教材を開発し、その効果を検証することを目的とした。

3. 研究の方法

本研究は、特定の主題 (topic-specific) に関するデザイン研究 (Gravemeijer & Prediger, 2019) の方法論を採用する。デザイン研究とは、教室における学習指導の改善 (教育実践上の課題の解決) と、学習に関わる理論の生成 (学術研究上の課題の解決) という二重の目的を達成するための方法論である。デザイン研究は、一般教育学においても採用されている方法論であるが、その場合に生成される仮説は、教科の内容・活動の固有性が考慮されない大略的なものとなる。これに対して本研究は、数学という教科の固有性を踏まえ、数学的探究における定義活動という特定の活動に関する学習指導の改善と理論の生成を行う。

デザイン研究は、準備、実施、反省の循環的なサイクルによって行われる。具体的には、まず応募者が期待する活動の規定及び教材の開発を行う。次に、中学校・高等学校の教員の協力を得て、授業において開発した教材を実施する。そして、応募者が得られたデータを質的に分析することで、教材の要件と教材を再考するとともに、学習に関する理論を生成する。なお本研究は質的研究であるため、大規模データの分析による広い知見の獲得ではなく、教室における生徒の活動の詳細な分析による深い知見の獲得を目指した。

4. 研究成果

本研究の成果は、理論面と実践面から大きく以下の二つに分けられる。

第一に、理論的考察を通して、数学的探究における定義活動の類型の一つである、証明と論駁における定義活動のあり方を明らかにしたことである。具体的に、数理哲学者のイムレ・ラカトシュ (Imre Lakatos) の主著である『証明と論駁 (Proofs and refutations)』 (Lakatos, 1976) の基となった未刊学位論文 (Lakatos, 1961) を分析することで、証明と論駁における定義活動の諸相を規定した。それは、「0. 問題状況」を前提として、「1. 零概念を含む原始的推測、2. 証明、3. 大局的反例の発見による零定義の顕在化、4. 補題組み込み法/演繹的推量による推測の洗練、5. 証明生成定義の定式化」という五つの相からなる。この諸相は、従来の研究では注目されてこなかった、零定義 (zero-definition) や証明生成定義 (proof-generated definition) といった概念を用いることで、証明と論駁の文脈において、暫定的に構成した定義を数学的に洗練していく活動のあり方を示したものである。以上について、得られた知見を論文の形にまとめて学会誌『科学教育研究』に投稿し、査読を経て論文が受理、刊行された (村田, 2021)。

第二に、実践的考察を通して、事柄の証明と論駁における定義活動、及び数学的概念の拡張における定義活動を促進するための課題を設計し、中学生を対象とした研究授業を実施したことである。まず、数学的探究における定義活動の方法 (村田, 2020) を規範的枠組みとして位置づけることで、生徒による実現を期待する活動である学習目標を明確にした。次に、公立中学校教

論及び国立大学附属中学校教諭の協力を得たうえで、事柄の証明と論駁における定義活動を促進するための教材として「多角形の接着」を、数学的概念の拡張における定義活動を促進するための教材として「四捨五入の拡張」を開発し、中学生を対象とした研究授業を実施した。そして、授業の録画記録及び録音記録を基に作成したトランスクリプト及び生徒によるワークシートを質的に分析することで、① 証明における問題点への着目を促すことで、教室全体の活動として生徒たちは、暫定的に構成した零定義を証明生成定義へと洗練する活動に取り組んだこと、② 複数の正答が発生し得る問題を提示することで、教室全体の活動として生徒たちは、既知の概念を拡張する際に定義の必要に気がつき、その概念を再定義する活動に取り組んだことを特定した。したがって、開発した教材には、実現を期待する活動を促進するにあたって一定の効果が認められることが明らかとなった。以上について、得られた知見を論文の形にまとめ、学会誌『日本数学教育学会誌』及び『科学教育研究』に投稿した。

本研究の学術的意義は、事柄の証明と論駁における定義活動及び数学的概念の拡張における定義活動のあり方を理論的に考察したうえで、中学生を対象として、これらの活動を促進するための教材を開発したことである。学校数学において定義は、教科書においてあるいは教師から天下一的の提示されることが多いが、開発した教材は、生徒たちが自分自身で定義を構成したり洗練したりする活動に取り組む機会を提供するものである。それゆえ、本研究の成果は、学校数学における定義のあり方に対して一石を投じた点において社会的意義がある。

<引用・参考文献>

- 中西知真紀・國宗進他 (1983). 「図形における論証指導について：第6次報告」. 『日本数学教育学会誌 数学教育』, 第65巻 第3号, pp. 13-24.
- 村田翔吾 (2020b). 「数学的探究における定義活動の方法に関する研究：規範的側面に焦点を当てて」. 『日本数学教育学会誌 数学教育学論究』, 第114号, pp. 19-38.
- 村田翔吾 (2021). 「ラカトシュによる数学的知識の生成論とその学校数学への援用可能性：零定義から証明生成定義への洗練に焦点を当てて」. 『科学教育研究』, 第45巻 第3号, pp. 331-346.
- Gravemeijer, K., & Prediger, S. (2019). Topic-specific design research: An introduction. In G. Kaiser, & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education, ICME-13 Monographs* (pp. 33-57). Cham, Switzerland: Springer.
- Kobiela, M., & Lehrer, R. (2015). The codevelopment of mathematical concepts and the practice of defining. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(4), 423-454.
- Lakatos, I. (1961). *Essays in the logic of mathematical discovery*. Ph. D. dissertation, University of Cambridge. Retrieved from Cambridge University Library, Digital Content Unit.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 村田翔吾	4. 巻 45(3)
2. 論文標題 ラカトシュによる数学的知識の生成論とその学校数学への援用可能性：零定義から証明生成定義への洗練に焦点を当てて	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 科学教育研究	6. 最初と最後の頁 331-346
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14935/jssej.45.331	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 村田翔吾
2. 発表標題 証明と論駁における定義活動を促進するための課題設計：証明生成定義に着目して
3. 学会等名 日本数学教育学会第55回秋期研究大会
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	四之宮 暢彦 (SHINOMIYA Nobuhiko)	国立筑波大学附属中学校・教諭	
研究協力者	早川 竣 (HAYAKAWA Shun)	台東区立上野中学校・教諭	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------