

令和 5 年 4 月 23 日現在

機関番号：12401

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2021～2022

課題番号：21K20315

研究課題名（和文）Ricci曲率の概念を持つ離散空間上の幾何解析

研究課題名（英文）Geometry analysis on discrete spaces under a lower Ricci curvature bound

研究代表者

櫻井 陽平（Yohei, Sakurai）

埼玉大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：90907958

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,400,000円

研究成果の概要（和文）：Ricci曲率は滑らかなRiemann多様体の曲がり方を測る指標であり、様々な観点から研究が行われてきた。特にHamiltonにより導入されたRicci流と呼ばれるRicci曲率を用いた幾何学流はPoincare予想の解決など幅広い応用を持つ。本研究では優Ricci流（Ricci流の優解）に焦点を当て、それに沿った熱方程式に関する幾何解析の結果を得た。また近年、Ricci曲率の概念を滑らかとは限らない空間へ導入する試みが為されている。本研究ではBakry-Emery理論の観点から、離散空間に対して優Ricci流の概念を導入し、具体例の構成や関数不等式による特徴付けといった結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Ricci流はPerelmanによる3次元Poincare予想の解決において重要な役割を果たした。最近Bamlerにより高次元Ricci流の収束理論が発展しており、Perelmanの3次元の場合の結果を包括する理論が確立されつつある。そこでは優Ricci流に沿った熱方程式の幾何解析が鍵となっている。本研究で得られた諸結果は、それらの理論の今後の更なる発展に寄与するものであると考えられる。また離散空間上の幾何解析は純粋数学のみならず応用数学の観点からも注目を集めている。本研究で得られたグラフに対する優Ricci流に関する諸結果についても、材料科学や機械学習など他の分野への還元が期待される。

研究成果の概要（英文）：Ricci curvature is one of the most fundamental objects in Riemannian geometry, and it has been studied from various perspectives. Hamilton has introduced a geometric flow called Ricci flow via Ricci curvature, and Perelman has solved the well-known Poincare conjecture based on the Ricci flow theory. In this project, we focus on a super solution to the Ricci flow called super Ricci flow, and obtain several geometric and analytic results for the heat equation along super Ricci flow. On the other hand, in recent years, there are some attempts to introduce the notion of Ricci curvature for non-smooth spaces. In this project, we provide a notion of super Ricci flow for discrete spaces from the viewpoint of the Bakry-Emery theory. We construct some examples, and conclude characterization results via functional inequalities.

研究分野：微分幾何学

キーワード：Riemann幾何学 離散幾何解析 Ricci曲率 幾何学流

## 1. 研究開始当初の背景

Ricci 曲率が下に有界な滑らかな Riemann 多様体は幾何学, 解析学, 確率論などの観点から重要な対象である. 近年, Ricci 曲率の下界性の概念が (滑らかとは限らない) 測度付きの距離空間 (以下, 測度距離空間) に対して定式化され, そのような性質を満たす測度距離空間の理論が急速に発展している. 測度距離空間に対し, Sturm, Lott-Villan は最適輸送理論の手法を用いて曲率次元条件, Ambrosio-Gigli-Savare, Erbar-桑田-Stur は曲率次元条件にラプラシアン線の線形性を付加した Riemann 的曲率次元条件と呼ばれる性質を導入した. それらの条件は境界のない Riemann 多様体上で Ricci 曲率の下界性 (かつ次元の上界性) と同値である. 曲率次元条件を満たす測度距離空間は CD 空間, Riemann 的曲率次元条件を満たす測度距離空間は RCD 空間と呼ばれ, Ricci 曲率が下に有界な (境界のない) Riemann 多様体に対する多くの結果がそれらの空間に対して拡張されている. CD 空間や RCD 空間の理論の進展は Ricci 曲率の下界性に対する深い理解を我々に提供している.

CD 空間および RCD 空間の理論は従来よく研究されてきた Alexandrov 空間や Ricci 極限空間と呼ばれる空間の理論を包括することが分かっており, その汎用性の高さが明らかになりつつある. 一方, CD 空間や RCD 空間の理論では取り扱うことができない対象も存在する. その典型例としてグラフなどの離散的な空間が挙げられる. CD 空間や RCD 空間は測地的 (任意の二点を最短測地線によって結ぶことができる) と呼ばれる性質を満たすため, 離散空間はそれらの理論の範疇には含まれない. 離散空間に対してはその構造を反映した Ricci 曲率の下界性の概念を導入する試みがいくつかなされている. 例えば, Bonciocat-Sturm および Erbar-Maas はそれぞれ離散空間に適合するように曲率次元条件を変形し Ricci 曲率の下界性の概念を導入している. また例えば Lin-Lu-Yau はランダムウォーク付き距離空間に対する Ollivier 型コース Ricci 曲率を修正し (無向) グラフに対して Ricci 曲率を導入している. さらに Bakry-Emery 型 Bochner 不等式を用いた定式化も代表的なものの一つである. 近年, それぞれの条件のもとで種々の幾何解析的性質が導かれている.

## 2. 研究の目的

Ricci 曲率は滑らかな Riemann 多様体の曲がり方を測る指標の一つであり, 様々な観点から研究が行われてきた. 特に Hamilton により導入された Ricci 流と呼ばれる Ricci 曲率を用いた幾何学流は Poincare 予想の解決など幅広い応用を持つことが明らかになっている. 近年, Ricci 曲率の概念を滑らかとは限らない測度距離空間やグラフなどの離散的な空間へ導入する試みが為されている. 本研究の目的は, 離散的な空間に対して Ricci 流の概念を導入し, それを用いた幾何解析やグラフの変形理論を展開することである. Ricci 流の導入への第一歩として, 本研究では Ricci 流の優解である優 Ricci 流に焦点を当てる. 時間発展するグラフに対して優 Ricci 流の概念を導入し, その幾何解析的性質を明らかにし, Ricci 流理論の展開への足掛かりとする.

## 3. 研究の方法

従来の滑らかな Riemann 多様体に対する優 Ricci 流と離散空間に対する優 Ricci 流の研究を並行して行い, それらの統一的理解を図る.

## 4. 研究成果

優 Ricci 流の幾何解析について以下の研究成果を得た:

### (1) 優 Ricci 流に沿う熱方程式の幾何解析

國川慶太氏 (宇都宮大学) と共同で優 Ricci 流に沿う熱方程式の幾何解析に関していくつかの結果を得た. まず優 Ricci 流の古代解に沿う調和写像流の Liouville 性質に関する研究を行った. 研究開始時以前に國川氏と共同で同様の設定のもと, 熱方程式の古代解に対する Liouville 定理を得ており, そのターゲットの空間を一般化する試みである. 我々はターゲットの空間に対して断面曲率の上からの有界性, さらに調和写像流に対して Perelman の簡約距離に関する増大条件を課し Liouville 定理を導出することに成功した. 我々の結果における調和写像流の増大条件について, ターゲットの空間が非正曲率を持つ場合はシャープであるが, 断面曲率が上から正の定数で押さえられている場合はシャープであるかは不明である. 我々は増大条件の適切性に関する研究を推し進め, 時間が止まっている場合に (すなわち調和写像の場合に) ほぼシャープなものに改良できることを示した. ここでは Schoen-Uhlenbeck により構成された例が深く関わっている. 証明の鍵は Ecker-Huisken による極小曲面に対する Bernstein 型定理の証明のア

アイデアを調和写像に対して応用する点である。これらの研究成果を論文に纏め、査読付き学術誌に投稿し掲載受理された。

さらに國川氏と共同で(一般化された)スカラー曲率が有界な優 Ricci の幾何解析に関する研究を行った。Bamler-Zhang は Ricci 流の特異時刻におけるスカラー曲率の振る舞いを理解するという動機から、スカラー曲率が有界な Ricci 流の幾何解析を発展させた。我々は彼らの結果の一部をより一般の幾何学流に対して拡張することに成功した。ここでの研究対象は優 Ricci 流であり、かつ Muller により導入されたとある量が非負のものである。これは調和写像流との混合流、Lorentz 多様体内の平均曲率流、Kahler-Ricci 流を例として含む。このような対象に対して距離関数の歪み評価、平均値不等式、熱核に対する Gauss 型評価を示した。これらの研究成果を論文 (arXiv:2201.11361) に纏め、現在、査読付き学術誌に投稿中である。

## (2) 離散空間上の優 Ricci 流

小澤龍ノ介氏(防衛大学校)、山田大貴氏(島根大学)と共同で離散空間上の優 Ricci 流に関する研究を行った。離散空間に対してはその構造を反映した Ricci 曲率の下界性の概念を導入する試みがいくつかなされているが、優 Ricci 流に関してもいくつかの定式化が考えられる。我々は Bakry-Emery 理論の観点から時間依存版 Bochner 不等式を用いた定式化を与え、その性質の解明を試みた。特に具体例の構成および関数不等式(勾配評価、Poincare 不等式)による特徴付けに関して知見を得ることが出来た。

## (3) 距離空間の間の調和写像

上述の研究とは独立に、単独で距離空間の間の調和写像に関する研究を行った。strongly rectifiable な測度距離空間から CAT(1)空間内の正則測地球への調和写像に関する Dirichlet 問題について考察し、Gigli-Tyulenev により導入された Korevaar-Schoen 型エネルギーの最小化写像が一意的に存在することを示した。写像の定義域がより強い正則性を満たす場合、同様の結果は Serbinowski らにより得られており、彼らの結果を RCD 空間を含むような枠組みまで一般化した。これらの研究成果を論文 (arXiv:2208.07150) に纏め、現在、査読付き学術誌に投稿中である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Keita Kunikawa and Yohei Sakurai	4. 巻 60
2. 論文標題 Liouville theorems for harmonic map heat flow along ancient super Ricci flow via reduced geometry	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00526-021-02079-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 7件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 櫻井陽平
2. 発表標題 Characterization of lower curvature bounds
3. 学会等名 埼玉大学幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 櫻井陽平
2. 発表標題 Liouville theorem for harmonic map heat flow along ancient super Ricci flow via reduced geometry,
3. 学会等名 神楽坂微分幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yohei Sakurai
2. 発表標題 Maximal diameter theorem for directed graphs of positive Ricci curvature
3. 学会等名 The 21st International Conference on Discrete Geometric Analysis for Material Design（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yohei Sakurai
2. 発表標題 Liouville theorem for harmonic map heat flow along ancient super Ricci flow via reduced geometry
3. 学会等名 The 6th China-Japan Geometry Conference (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 櫻井陽平
2. 発表標題 Gaussian heat kernel estimates of Bamler-Zhang type along super Ricci flow
3. 学会等名 確率論と幾何学 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 櫻井陽平
2. 発表標題 Various curvature conditions on weighted Ricci curvature and geometric analysis
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 櫻井陽平
2. 発表標題 Liouville theorems for harmonic maps between singular spaces
3. 学会等名 Analysis and Geometry on Metric Measure Spaces and Future Perspectives (招待講演)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Geometry ana Probability 2022	開催年 2022年～2022年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------