

令和 5 年 5 月 31 日現在

機関番号：12601

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2021～2022

課題番号：21K20317

研究課題名（和文）量子幾何学的Langlands予想と W 代数の新展開研究課題名（英文）Quantum geometric Langlands conjectures and New development in W -algebras

研究代表者

元良 直輝 (Genra, Naoki)

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・特任研究員

研究者番号：00909202

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,400,000 円

研究成果の概要（和文）：アファインLie代数や W 代数の表現論への応用を視野に置いた W 代数の構造に関する様々な結果を得た。中でもDrazen Adamovic氏とThoams Creutzig氏との共同研究により得た、アファイン sl_3 のrelaxed moduleをBereshadosky-Polyakov代数から構成する逆還元法の開発は、 W 代数の表現論とアファインLie代数の表現論のより深い関係性を示唆することになり、大きなインパクトを与えた。これを受けてThibault Juillard氏と行った段階的還元法の結果は、 W 代数と量子幾何学的Langlands予想との関係性に新たな予想を生み出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

W 代数の研究は一部の特別なクラスを除いて進展途中であるにも関わらず、理論物理の発展により様々な予想が生まれ、量子幾何学的Langlands予想のような数学的にも重要な様々な問題と結びついている。本研究結果は W 代数の表現論とアファインLie代数や量子幾何学的Langlands予想との関係性をより深く具体的に明らかにするものであり、今後の数理物理全体において重要な意義を持つものだと考えられる。

研究成果の概要（英文）：We have obtained several results on representation theories of affine Lie algebras and W -algebras. In particular, the joint work with Drazen Adamovic and Thomas Creutzig on the invese Hamiltonian reduction of Bereshadosky-Polyakov algebras to affine sl_3 algebras implies certain relationships between representation theories of affine Lie algebras and W -algebras. Based on the relation, with Thibault Juillard we showed that W -algebras are obtained by Hamiltonian reductions of suitable W -algebras, which suggests conjectual relationship between quantum geometric Langlands and W -algebras.

研究分野：表現論

キーワード：頂点代数 アファインLie代数 量子幾何学的Langlands予想 スクリーニング作用素

1. 研究開始当初の背景

超弦理論における対称性を反映するモデルに二次元共形場理論があるが、その数学的定式化の一つとして頂点代数がある。頂点代数はアフィン Lie 代数などの無限次元代数の表現論や可積分系をはじめとして、有限群論や保型形式、組み合わせ論や代数幾何まで関連することがわかっている。中でも W 代数は、理論物理の文脈で最もよく現れる重要な頂点代数のクラスの一つである。W 代数は Virasoro 代数の自然な一般化と考えられており、代表的なスーパーコンフォーマル代数を例として含みながら、Virasoro 代数の表現論における様々な数学的性質（極小系列の存在、指標のモジュラー性、S 行列に関する Verlinde 公式など）を引き継いでいると予想されている。さらに、W 代数は中零軌道の理論や量子幾何学、ゲージ理論や量子幾何学的 Langlands プログラムとの関連まで明らかになっており、数学と理論物理の両方から注目され、その重要性が加速度的に高まっている。一方で、W 代数の構造は複雑で特別な場合にしか取り扱われてこなかったほど解析が困難だったが、近年応募者のスクリーニング作用素による構成による研究等から、W 代数の構造・表現論は急速に進展中であった。

2. 研究の目的

本研究課題ではこの流れを加速させるとともに、近年の $N=2$ の超対称性四次元ゲージ理論における S 双対性によって生じた W 代数の表現論に関する予想の解析やアフィン Lie 代数への応用、さらには量子幾何学的 Langlands プログラムなどの様々な応用を視野に置いた W 代数の構造・表現論を展開する。

3. 研究の方法

本研究は頂点代数、群論、表現論、代数幾何学、幾何学的表現論、保型形式、場の量子論と様々な分野にまたがっているため、研究遂行には RIMS の荒川知幸先生やアルバータ大学の Thomas Creutzig 先生をはじめとした多くの研究者との交流が不可欠である。そのため、共同研究者との議論や打ち合わせ、国内外を問わず各分野の専門家の招聘、そして研究集会などでの情報収集を行った。

4. 研究成果

アフィン Lie 代数や W 代数の表現論、そして量子幾何学的 Langlands 予想との関係性への応用を示唆する様々な結果を得た。これらの結果は、Drazen Adamovic, Thomas Creutzig, Andrew Linshaw, Thibault Juillard 等との共著の論文として掲載が決定しているか、その他のものもインターネット上で公開されている。中でも Drazen Adamovic 氏と Thomas Creutzig 氏との共同研究 (Mathematische Annalen から出版予定) により得た、アフィン $\mathfrak{sl}_3$ の relaxed module を Bershadsky-Polyakov 代数から構成する逆還元法の開発は、W 代数の表現論とアフィン Lie 代数の表現論のより深い関係性を示唆することになり、大きなインパクトを与えた。これを受けて Thibault Juillard 氏と行った段階的還元法の結果は、W 代数と量子幾何学的 Langlands 予想との関係性に新たな予想を生み出した。以下では具体的な成果について記述する。

(1) アフィン $\mathfrak{sl}_3$ の逆還元法の開発

Drazen Adamovic 氏と Thomas Creutzig 氏との共同研究。アフィン $\mathfrak{sl}_3$ を Bershadsky-Polyakov 代数と自由場によって生成される頂点代数とのテンソル積へ埋め込むことで、Bershadsky-Polyakov 代数の表現からアフィン $\mathfrak{sl}_3$ の表現を構成する方法を確立した。これは共同研究者である Drazen Adamovic 氏の $\mathfrak{sl}_2$ の場合の結果の一般化であり、応募者の結果はさらなる一般化の存在を示唆させることになった。またこの構成法から得られるアフィン $\mathfrak{sl}_3$ の表現は relaxed module と呼ばれるものであり、これは対数的共形場理論において標準の対象になると考えられており、その解析にも重要な結果を与えたことになる。

(2) アフィン $\mathfrak{osp}(1|2n)$ の最高ウェイト圏の解析

Andrew Linshaw 氏と Thomas Creutzig 氏との共同研究。アフィン $\mathfrak{osp}(1|2n)$ のアフィン $\mathfrak{sp}(2n)$ によるコセットが BC 型の主 W 代数になることを証明した。これによって、アフィン $\mathfrak{osp}(1|2n)$ がアフィン $\mathfrak{sp}(2n)$ と BC 型の主 W 代数のテンソル積の表現としての拡大になっていることがわかる。特にレベルが Kac-Wakimoto の意味での許容レベルであるとき、

アファイン $\mathfrak{osp}(1|2n)$ の最高ウェイト圏は半単純かつ剛性を持ち、さらに単純対象は同型による違いを除いて有限個しかないと証明した。これによってアファイン $\mathfrak{sp}(2n)$ の最高ウェイト圏も剛性をもつことが証明される。

(3) $\mathfrak{osp}(1|2n)$ の有限 $\mathbb{W}$ 代数と ghost center との同型

$\mathfrak{osp}(1|2n)$ に付随する主 $\mathbb{W}$ 代数の表現はその Zhu 代数によってコントロールされ、それは DeSole-Kac によって有限 $\mathbb{W}$ 代数となることが知られていた。応募者は $\mathfrak{osp}(1|2n)$ の有限 $\mathbb{W}$ 代数が Maria Gorelik によって導入された ghost center と同型であることを証明した。特に ghost center の既約表現を分類することにより、 $\mathfrak{osp}(1|2n)$ に付随する主 $\mathbb{W}$ 代数の正次数付けされる既約表現の分類に成功した。

(4) $\mathbb{W}$ 代数の段階的還元法

Thibault Juillard 氏との共同研究。 $\mathbb{W}$ 代数と逆還元法の関係性から $\mathbb{W}$ 代数自体が異なる $\mathbb{W}$ 代数の量子 Hamiltonian 還元によって得られることが予想されていた。この予想を古典的な場合 (Slodowy 断片) と量子的な場合 (有限 $\mathbb{W}$ 代数) で証明し、 $\mathbb{W}$ 代数の場合でも予想を与えることに成功した。特に有限 $\mathbb{W}$ 代数の場合の結果から、有限 $\mathbb{W}$ 代数の有限生成加群の圏と異なる有限 $\mathbb{W}$ 代数の Whittaker 加群のなす圏の間の圏同値を得ることができた (段階的 Sklyabin 同値)。 $\mathbb{W}$ 代数の表現の場合に適用すると、異なる指標に関するアファイン Lie 代数の表現圏の間関係性を与えるという点から、量子幾何学的 Langlands 予想との関係性が示唆された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件／うち国際共著 2件／うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Creutzig Thomas, Genra Naoki, Nakatsuka Shigenori, Sato Ryo	4. 巻 393
2. 論文標題 Correspondences of Categories for Subregular W-Algebras and Principal W-Superalgebras	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1～60
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-021-04297-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Creutzig Thomas, Genra Naoki, Nakatsuka Shigenori	4. 巻 383
2. 論文標題 Duality of subregular W-algebras and principal W-superalgebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 107685～107685
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aim.2021.107685	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計11件（うち招待講演 9件／うち国際学会 8件）

1. 発表者名 Naoki Genra	
2. 発表標題 Dualities of W-algebras and Feigin-Semikhatov conjectures	
3. 学会等名 2022 AMS Spring Western Virtual Sectional Meeting Special Session on Some Modern Developments in the Theory of Vertex Algebras（招待講演）（国際学会）	
4. 発表年 2022年	

1. 発表者名 Naoki Genra	
2. 発表標題 Feigin-Semikhatov duality	
3. 学会等名 Conference on Vertex Algebras and Representation Theory（招待講演）（国際学会）	
4. 発表年 2022年	

1. 発表者名 Naoki Genra
2. 発表標題 Feigin-Semikhatov 双対性について
3. 学会等名 日本数学会 2022 年度秋季総合分科会 特別講演（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Naoki Genra
2. 発表標題 Feigin-Semikhatov duality
3. 学会等名 Representation Theory XVII, IUC Dubrovnik（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Naoki Genra
2. 発表標題 On twisted Zhu algebras
3. 学会等名 Conference in finite groups and vertex algebras, dedicated to Masahiko Miyamoto on the occasion of his 70th birthday（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Naoki Genra
2. 発表標題 Reduction by stages on W -algebras
3. 学会等名 Representation theory and geometry of loop spaces（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Naoki Genra
2. 発表標題 Zhu algebras of Principal W-algebras of $osp(1 2n)$
3. 学会等名 the Subfactors, Vertex Operator Algebras and Tensor Categories workshop, IASM in Hangzhou, China and BIRS in Banff, Canada (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Naoki Genra
2. 発表標題 Feigin-Semikhatov duality
3. 学会等名 a workshop on Pure Spinors, Superalgebras and Holomorphic Twists, Heidelberg University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Naoki Genra
2. 発表標題 Dualities of W-algebras and Feigin-Semikhatov conjectures
3. 学会等名 Seminar on Lie algebras and applications, HSE math department and Skoltech CAS (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 元良直輝
2. 発表標題 A 型の Adamovic パスについて
3. 学会等名 日本数学会, 千葉大学
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Naoki Genra
2. 発表標題 Dualities on W-algebras and W-superalgebras
3. 学会等名 GTM seminar
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

—

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	オルセー数学研究所			
カナダ	アルバータ大学			
米国	デンバー大学			
クロアチア	ザグレブ大学			