

令和 5 年 6 月 19 日現在

機関番号：12601

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2021～2022

課題番号：21K20318

研究課題名（和文）オンライン最適化手法を用いた確率過程の推定

研究課題名（英文）Estimation of Stochastic Processes with Online Optimisation Methods

研究代表者

仲北 祥悟（Nakakita, Shogo）

東京大学・大学院総合文化研究科・特任助教

研究者番号：80855114

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,400,000円

研究成果の概要（和文）：離散観測される確率微分方程式に対して一様非漸近リスク評価を持つオンライン推定法を構築し、その性質を数値実験によって検証した。本研究は特に確率的勾配降下法を疑似対数尤度関数に対して活用するために、バイアス・従属構造のある確率的劣勾配に対する確率的鏡像降下法の収束保証を行った。更に考える確率微分方程式モデルのクラスに対して一様なミキシング性評価を与えることで、この確率的鏡像降下法の収束保証が今回考える問題においては一様となることを示した。これらの道具立てを利用して、オンライン推定の一様リスク上界を導出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究によって得られたオンライン推定法は、柔軟な現象モデリングを可能にする確率微分方程式に対して現実的な離散観測という設定の下で、更に計算負荷の低い迅速な推定方法を実現するものである。これまでも同様のモチベーションで議論はなされてきたが、収束レートを離散観測の設定下で与えたオンライン推定法の研究は見られず、非自明な理論的進展を与えている。また柔軟なモデリングと計算負荷の低い推定方法の組み合わせによって、近年注目を集めるエッジデバイス上のデータ解析においても有効な解析手段を提供する。

研究成果の概要（英文）：We proposed an online estimation method with uniform risk bounds for discretely observed stochastic differential equations and examined this method by numerical simulations. We gave convergence guarantees for stochastic mirror descent algorithms with biased and dependent subgradients to apply them for quasi-log-likelihood functions. In addition, we derived uniform estimates for the mixing of classes of stochastic differential equations, which make the guarantees for stochastic mirror descent uniform in a class of stochastic differential equations. The uniform risk bounds of the proposed method in our study are obtained by the combination of these discussions.

研究分野：理論統計学

キーワード：オンライン最適化 確率過程の統計学 確率的最適化 エルゴード性

1. 研究開始当初の背景

実社会において、時間が経過するにつれて不確実性を伴って発展する現象は数多く見られる。そのような現象を表現する確率モデルを与え、確率モデルの構造をデータから統計的に推定することは、その現象の分析や予測の観点から重要である。

特に確率モデルとして確率微分方程式と呼ばれるモデルを用いることには、幾つかの利点がある。代表的な利点として、現象の複雑な構造を確率モデルで表現する際に、確率微分方程式モデルは極めて柔軟な表現を許すことが挙げられる。

このような確率微分方程式について、現実的な設定である離散時間上の観測に基づいた推定方法の研究が30年近く研究されてきた。推定に用いるデータが既に全て得られている状況での確率微分方程式のパラメータ推定、すなわちバッチ推定を高精度で実現する方法論の開発は大きな成功を収めている。

しかしその一方で、データが全て集まる前に現象に対して何らかの推測や予測をリアルタイムで行いたい状況も考えられる。特に時系列データ解析において、現象の異常をいち早く検出することや、現象の観測を通じて逐次的に行動を決定することが時に主たる関心となる。このような状況に対応するため、短い計算時間で逐次的にパラメータを推定できる方法、すなわちオンライン推定法の確立が重要である。既に確率微分方程式以外の確率モデルにおいては、状態空間モデルに対するカルマンフィルタや離散時間モデルに対する再帰的最尤推定等の有用なオンライン推定法が考えられてきた。しかし確率微分方程式の統計的推測においては、バッチ推定法と比較すると理論的保証を持つオンライン推定法の議論はほとんど見られなかった。

2. 研究の目的

このような背景を受けて、本研究では確率微分方程式に対する離散観測に基づくオンライン推定法の構築を目的として研究を行った。

3. 研究の方法

本研究では、特に理論研究を用いて収束保証のある推定方法を構築すること、更にその推定法が実際にどのような挙動を示すかを数値実験によって確かめた。

4. 研究成果

離散観測される確率微分方程式に対して一様非漸近リスク評価を持つオンライン推定法を構築し、その性質を数値実験によって検証した。

(1) (オンライン勾配降下法による確率微分方程式のパラメータ推定) 本研究は特に確率的勾配降下法を疑似対数尤度関数に対して活用するために、バイアス・従属構造のある確率的劣勾配に対する確率的鏡像降下法の収束保証を行った。ここで疑似対数尤度関数とは、離散観測される確率微分方程式の解に基づいた統計的推測で用いられる一般的な損失関数である。通常尤度関数は陽な表現を持たないため、それを代替する方法として疑似対数尤度関数が考えられることが多い。確率的鏡像降下法とは確率的勾配降下法の一般化であり、鏡像降下法の理論保証は勾配降下法に対しても適用できる。また、考える確率微分方程式モデルのクラスに対して一様なミキシング性評価を与えることで、この確率的鏡像降下法の収束保証が今回考える問題においては一様となることを示した。これらの道具立てを利用して、オンライン推定の一様リスク上界を導出した。

(バイアスと従属構造を持つ劣勾配に基づく確率的鏡像降下法のリスク上界導出) 疑似対数尤度関数に対して確率的鏡像降下法を当てはめると、各劣勾配が互いに従属構造を持つ上に、更新に用いる劣勾配が本当に必要な目的関数の劣勾配に対してバイアスを持つ。これらは収束保証を与える上での難点なる。これらを克服するため、従属構造を持つ場合の確率的鏡像降下法の既存のリスク保証 (Duchi et al., 2012) を拡張し、バイアス・従属構造双方を持つ確率的鏡像降下法のリスク保証を与えた。

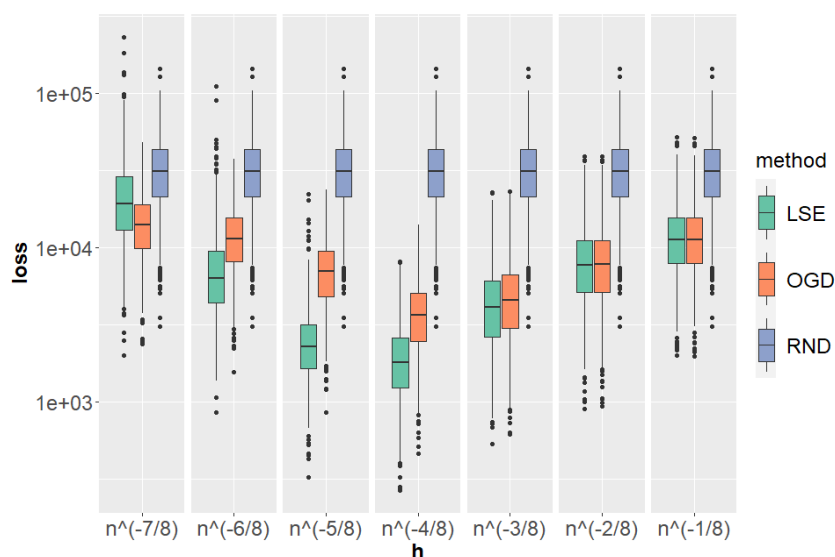
(確率微分方程式のクラスに対して一様なミキシング評価) 上述のリスク上界保証は、現象を真に表現する確率モデルのミキシング性、すなわち遠く離れた時点における確率モデルの値同士はどの程度独立と見なせるかの評価に依存している。考えるモデルクラスに対して一様にリスク上界保証が成立することは安定的な推定を意味するため望ましいが、これを示すには上述の理由で確率微分方程式クラスの一様ミキシング評価が必要となる。本研究ではそのようなミキシング性評価を、最近の確率微分方程式の推移密度関数に対する Aronson 型評価 (Menozzi et al., 2021) と Harris 型の定理 (Kulik, 2017) を用いて達成した。これは既存の評価と比較してより広範な確率微分方程式のクラスに対する一様評価を与える。

(上述の議論を組み合わせたオンライン推測方法の構築) で開発した確率的鏡像降下法のリスク保証と で証明した確率微分方程式のクラスに対して一様ミキシング評価を組み合わせて、疑似対数尤度関数を活用したオンライン推定法の一様リスク上界を行った。この上界が0に

収束するならばパラメータ推定も収束すると緩やかな条件の下で保証できる。そのような上界の収束を、観測頻度が適度に高頻度でかつ観測期間が長いとする条件の下で示した。またこのオンライン推定法の計算はバッチ推定法と比較して極めて軽量であり、オンライン推定の目的を果たすことを示した。

(2) 数値実験において、提案手法を全てのデータを利用する高精度な推定方法であるバッチ推定と比較し、提案手法がどのような状況においてバッチ推定に近い精度を出すことができるかを検証した。理論研究の結果としてオンライン推定はバッチ推定と比較すると過度な高頻度観測における収束が悪くなることが示されるが、実際にシミュレーションでこれを確かめた。逆に適度な観測頻度であれば、バッチ推定量と近いパフォーマンスを示すことがわかった。また数値実験上では、極端に頻度が高いケースや低いケースではバッチ推定量が何故か著しく性能を落とし、オンライン推定量がより高い性能を示すという興味深い結果も得られた。

下記の図はその数値実験の結果の一つを表す箱ひげ図である。緑のグラフが従来のバッチ推定量の対数損失関数、オレンジのグラフが提案手法の対数損失関数、青のグラフはパラメータ空間上の一様乱数、すなわちあてずっぽうな推定に対する対数損失関数の箱ひげ図を表す。損失関数の評価であるため、値が小さいことがよいパフォーマンスを意味する。より右側の箱ひげ図はより低い観測頻度におけるパフォーマンスを示す。バッチ推定量（緑）とオンライン推定（オレンジ）のパフォーマンスは観測頻度が低い（右半分）ほど近いものとなっていること、すなわち理論通りオンライン推定のパフォーマンスが相対的に優れることが見て取れる。また両端においては、バッチ推定量とオンライン推定量のパフォーマンスはほぼ変わらないが、オンライン推定量の方が良い状況さえあることを示している。



参考文献

- Duchi, J. C., Agarwal, A., Johansson, M., & Jordan, M. I. (2012). Ergodic mirror descent. *SIAM Journal on Optimization*, 22(4), 1549–1578.
- Kulik, A. (2017). *Ergodic Behavior of Markov Processes*. De Gruyter.
- Menzio, S., Pesce, A., & Zhang, X. (2021). Density and gradient estimates for non degenerate Brownian SDEs with unbounded measurable drift. *Journal of Differential Equations*, 272, 330–369.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Shogo Nakakita
2. 発表標題 Parametric estimation of ergodic diffusion processes by online gradient descent
3. 学会等名 DYNSTOCH 2023 - Workshop on Statistical Methods for Dynamical Stochastic Models (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Shogo Nakakita
2. 発表標題 Estimation of diffusion processes via online gradient descent
3. 学会等名 15th International Conference of the European Consortium for Informatics and Mathematics Working Group on Computational and Methodological Statistics (CMStatistics 2022) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 仲北祥悟
2. 発表標題 オンライン勾配降下法による確率微分方程式のパラメータ推定
3. 学会等名 2022年度統計関連学会連合大会
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------