

令和 5 年 6 月 26 日現在

機関番号：14301

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2021～2022

課題番号：21K20323

研究課題名（和文）ランダムニュートン法に関する力学系の研究

研究課題名（英文）Study of dynamical systems of random relaxed Newton methods

研究代表者

渡邊 天鵬（Watanabe, Takayuki）

京都大学・理学研究科・特定研究員

研究者番号：50913282

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 900,000 円

研究成果の概要（和文）：ランダム緩和ニュートン法を実装し、数値実験を通して数学的な予想を複数たてました。例えば、ニュートン法に十分大きいノイズをかけると求根アルゴリズムがうまく機能することは知られていましたが、ある例についてはとても小さいノイズでもランダムアルゴリズムが充分うまく機能することがわかりました。また、アルゴリズムに必要なノイズの大きさは、決定論的な緩和ニュートン法写像を一つの族と見たとき、その族の分岐が起こるパラメータと深く関係しているという数値結果が得られました。この予想を数学的に証明できれば、より良いアルゴリズムの開発につながります。

研究成果の学術的意義や社会的意義

工学を含むあらゆる数理的な課題の中で、与えられた関数の零点（根）を求めることはとても基本的で重要な問題です。本研究は、有名な求根アルゴリズムであるニュートン法にあえてノイズを入れることでアルゴリズムを改善できるか、という着想に基づいています。得られた成果として、ランダム力学系の確率分岐は決定論的な分岐よりも早く起こるだろう、という数学的にも実用上も重要な予想を発見するに至りました。これは、力学系理論の研究を新しい観点から開拓するという学術的な意義があります。また、実社会に対しても、（ランダム）求根アルゴリズムの改善を通して大きな影響を与えられる可能性を秘めています。

研究成果の概要（英文）：The PI implemented the random relaxed Newton methods and made several mathematical predictions through numerical experiments. For example, it was known that the root-finding algorithm worked well when the noise was sufficiently large, but for some examples, the random algorithm worked well even with very small noise. The PI also found numerically that the size of noise required for the algorithm is closely related to the parameter at which the family of the deterministic relaxed Newton maps bifurcates. The PI expects that mathematical proof of this conjecture will lead to the development of better algorithms.

研究分野：ランダム力学系理論

キーワード：ランダム力学系 ニュートン法 ランダムアルゴリズム 複素解析

1. 研究開始当初の背景

様々な科学分野において、与えられた関数に対しその根を数値的に求める「求根アルゴリズム」は極めて有用であり、古くは紀元前 1600 年以前のバビロニアで 2 の平方根の近似値が計算された記録が残っている。数学的には、多項式はその次数分の複素数根を持つが、実用上は根の代数的な表示より数値それ自体の方が価値が高い。

ニュートン法は最も重要な求根アルゴリズムの一つである。ニュートン・ラフソン法とも呼ばれるこの反復法は、適切な初期値から点列を計算することで、真の根の近似値を得る。良い初期値から計算を始めると急速に近似値が得られる一方、不適切な初期値を選んでしまうとアルゴリズムが終了しないこともある、という意味でニュートン法に大域的な収束は期待できない。これらの現象を説明するために、複素力学系の理論は 20 世紀から発展してきた。

複素力学系の理論によると、決定論的で代数的な求根アルゴリズムでは、必ずしも大域収束性が成り立たない。にもかかわらず、角大輝はニュートン法にランダム項を加えることで、有限個の例外を除く全ての初期値から出発したランダム軌道が確率 1 でいずれかの根に収束することを発見した。これが本研究の主題である。

角による結果を確率的なアルゴリズムだと考えると、実用する上で「収束の速さ」と「誤差の評価」が最も大きな問題であり、これらの点が本研究課題の核心的「問い」である。決定論的なニュートン法と比べると、ランダムニュートン法ではランダム項の所為で収束速度がそれほど早くない。ランダムネスによる大域収束性という利点と、局所的な収束速度の減衰という欠点が、このアルゴリズムには共存している。また、応用の幅を広げるために、標的の関数は多項式に限らずより広範なクラスを扱う必要がある。

2. 研究の目的

ニュートン法のランダム化に関する数学理論を発展させることで、与えられた関数の根を数値的に求める革新的な確率的アルゴリズムを提案することが本研究の目的である。様々な科学分野において関数の求根は必要不可欠であり、反復的なアルゴリズムの一例であるニュートン法は遍く活用されているが、初期値の選び方に恣意性があるという困難が存在する。近年、標的の関数が一変数多項式である場合に、ニュートン法にランダムネスを掛けることで、有限個の例外を除く全ての初期値に対して確率 1 でその根が求められることが発見された。しかし、誤差評価や根への収束速度とノイズとの関係、より一般的な関数への拡張など、核心的な「問い」は未解決である。実装においても力学系理論においても重要なこれらの問いを、ランダム力学系という独自の視点から統一的に解決し、数値解析分野と力学系理論に新しい価値を創造することを目指す。

3. 研究の方法

本研究の要であるランダム緩和ニュートン法をコンピュータ上に実装し、様々な数値実験を行うことでどんな現象が起こるのかを把握する。例えば、ニュートン法に十分大きいノイズをかけると求根アルゴリズムがうまく機能することは知られていたが、どの程度の大きさが最適なのか、ということを検証した。

また、当初予定していなかったが、研究の過程で新しい着想を得た。ランダム緩和ニュートン法のコードを利用することで、加法的なパラメータを持つ二次多項式族のランダム力学系に関して数値計算を行った。これらはマンデルブロ集合と共に、複素力学系理論において基本的でとても重要な役割を担っている。そのランダム版を数値計算も用いて解析する。

同様に、乗法的なパラメータを持つ二次多項式族について数値計算を用いて考察した。この族はロジスティック写像として数理生物学において知られており、閉ざされた環境中での生物の増減を記述するモデルとされている。ロジスティック写像のランダム力学系は、乗法的なランダム力学系という点でランダム緩和ニュ

ートン法と共通点があり、数理生物学の観点からも重要であると思われる。即ち、ロジスティック写像の決定論的な力学系がある環境での生物の増減を表していることと対比して、ランダムなロジスティック写像族は時々刻々変化する環境下での生物の増減を記述していると予想される。この重要な研究対象を、乗法的なランダム力学系という観点から研究する。

4. 研究成果

まず、加法的なパラメータを持つ二次多項式族のランダム力学系に関して数値計算を用いて、分岐が起こるパラメータを具体的に決定した。ニュートン法は乗法的なランダムネスがあるが、その前段階として加法的なランダムネスのモデルについて解析を行った。この研究により、とても良い精度で分岐パラメータを決定することに成功した。さらに、ランダム力学系の分岐においても決定論的な分岐が関係する部分と、関係しない部分があることを明確にできた。特に、放物的な周期点があれば確率分岐が起こることがわかった。これを用いて、二周期の超吸引周期点を持つ力学系に対して、とても小さいノイズを与えると確率分岐が起こることがわかった。また、分岐と関連して、サンプルパスごとの力学系が作るカオス部分(ジュリア集合)の連結性に関する結果を得た。即ち、分岐の前ではジュリア集合は必ず連結になるのに対して、分岐の後ではジュリア集合はカントール集合と同相になることがわかった。これらの結果をプレプリントとして纏め、国際学術誌に投稿した。

次に行ったのは、乗法的なノイズの掛かったランダム力学系という観点からの研究である。ニュートン法は次数が高い有理関数であり解析が難しいため、具体的に解析できるモデルとして、ロジスティック写像に由来する乗法的なランダム力学系に関する研究を行った。これは次数が 2 の非自明な力学系でありながら、様々な観点から重要な研究対象だと思われる。代表者はリアプノフ指数では測れない位相的な複雑さを図る指標として、不変グラフに関する全変動ノルムを導入した。それらを用いて、strange non-chaotic attractor (SNA) の存在を示唆する結果を得た。さらに、準周期的な外力に影響されるとき、SNA が存在するパラメータを数値的に求めることに成功した。SNA は物理学および純粋数学の両面から重要視されており、インパクトの高い結果と言える。SNA が発生するメカニズムについて、数学的な背景を現在解析中である。

そして、ランダムニュートン法の数値実験を行った。ノイズが大きい場合にはアルゴリズムは確率 1 で根の近似値を与えることが知られているが、理論値よりも 10 分の 1 程度の小さいノイズでもアルゴリズムがうまくいくことが確かめられた。これから得られる展開は二つある。一つ目は、現在知られているノイズの大きさよりもずっと小さいノイズがアルゴリズムを改善することが期待される。この方面での研究が進めば、ノイズの大きさの最適な値を求めることに繋がり、実用的な求根アルゴリズムの開発につながる。二つ目は、パラメータ空間および分岐を考慮した数学解析の発展である。前述の数値計算で得られたノイズの大きさは、決定論的な分岐の値と関係している可能性が示唆されている。この考察が正しければ、決定論的な分岐を調べることでランダム力学系の分岐を定量的に評価する手法が得られる。

また、数理最適化の分野でアニーリングとして知られる方法を数学的に定式化し、ランダム緩和ニュートン法に新しいアルゴリズムを提案した。数値実験を通して、アニーリングも良いアルゴリズムであることが検証できた。これを通して、今後の研究の基礎を確立できたため、数値計算と理論研究の両面から今後の解析が望まれる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 0件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Takayuki Watanabe	4. 巻 -
2. 論文標題 On the stochastic bifurcations of random holomorphic dynamical systems	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録（掲載予定）	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Takayuki Watanabe	4. 巻 -
2. 論文標題 On the stochastic bifurcations regarding random iterations of polynomials of the form $z^2 + c_n$	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 arXiv	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件（うち招待講演 6件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 渡邊天鵬
2. 発表標題 On the stochastic bifurcations of random holomorphic dynamical systems
3. 学会等名 ランダム力学系・非自励力学系研究の展望:理論と応用（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takayuki Watanabe
2. 発表標題 On the stochastic bifurcations regarding random iterations of polynomials of the form $z^2 + c_n$
3. 学会等名 The POSTECH Conference 2022 on Complex Analytic Geometry（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takayuki Watanabe
2. 発表標題 An estimates for Random Relaxed Newton Methods
3. 学会等名 International Workshop on Ergodic Theory, Dynamical Systems, and Climate Sciences (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 渡邊天鵬
2. 発表標題 Total disconnectedness of the random Julia sets of polynomials of the form $z^2 + c_n$
3. 学会等名 複素力学系と関連分野 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 渡邊天鵬
2. 発表標題 On the stochastic bifurcations regarding random iterations of polynomials of the form $z_2 + c^n$
3. 学会等名 Random topics on Teichmuller theory (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 渡邊天鵬
2. 発表標題 On the stochastic bifurcations regarding random iterations of polynomials of the form $z_2 + c^n$
3. 学会等名 第 56 回函数論サマ－セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 渡邊天鵬
2. 発表標題 On the stochastic bifurcations regarding random iterations of polynomials of the form $z_2 + c^n$
3. 学会等名 日本数学会 2022 年度年会(函数論分科会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 渡邊天鵬
2. 発表標題 ランダム複素力学系におけるマルコフ作用素の性質
3. 学会等名 北見工業大学(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 渡邊天鵬
2. 発表標題 On the stochastic bifurcations regarding random iterations of polynomials of the form $z_2 + c^n$
3. 学会等名 エルゴード理論とその周辺
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 渡邊天鵬
2. 発表標題 ランダム複素力学系の平均安定性とその分岐
3. 学会等名 ランダム力学系および多価写像力学系理論の総合的研究, 京都大学数理解析研究所(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 渡邊天鵬
2. 発表標題 The bifurcation of random holomorphic dynamical systems
3. 学会等名 複素力学系の諸相，京都大学数理解析研究所（招待講演）
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------