

令和 6 年 6 月 29 日現在

機関番号：14303

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2021～2023

課題番号：21K20326

研究課題名（和文）Dirichlet空間のSobolev-Orlicz埋蔵定理とその確率論的解釈

研究課題名（英文）Sobolev-Orlicz embedding theorems for Dirichlet spaces and their probabilistic interpretation

研究代表者

森 隆大（Mori, Takahiro）

京都工芸繊維大学・基盤科学系・助教

研究者番号：80909911

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,400,000円

研究成果の概要（和文）：最も基本的な確率過程のひとつであるBrown運動（BM）の性質に軌跡の交差現象がある。これは、単一のBMには複数回到達する点（自己交差）がある性質、または、複数の独立なBMを走らせたとき全ての軌跡が交わる点（相互交差）がある性質のことである。
本研究では、交差の性質を調べるために、確率論の対象であるBMと対応する関数解析の対象のDirichlet空間の考察を行った。特に、2次元BMに対する無限回の交差の性質をDirichlet形式の理論から明らかにすることを試みた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ブラウン運動は花粉内の微粒子の運動のモデルとして提唱され、物理学に留まらず株価の変動と言った経済学等にも応用されている。ブラウン運動の軌跡を一本の紐とみなすことでランダムポリマーへの応用が考えられ、ブラウン運動の軌跡の交差現象は高分子の屈曲性に相当する。本研究はその数学的基礎づけを行っているという点で社会的意義がある。

研究成果の概要（英文）：Brownian motion (BM) is one of the most fundamental stochastic processes. One of its properties is the phenomenon of trajectory crossing. This is the property that a single BM has a point that is reached multiple times (self-intersection), or a point where all trajectories intersect (mutual intersection) when multiple independent BMs run.
In this study, in order to investigate the property of intersection, we consider BMs, which are probabilistic objects, and Dirichlet spaces, which are corresponding functional analytic objects. In particular, we attempted to clarify the property of infinite crossing for 2-dimensional BM from the theory of Dirichlet forms.

研究分野：確率論

キーワード：Dirichlet形式 Sobolev不等式 intersection measure

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

確率過程の中で最も基本的なものの一つに Brown 運動 (BM) がある。ランダムウォーク (RW) のスケール極限として現れる BM は花粉内の微粒子の運動のモデルとして提唱され、物理学に留まらず株価の変動と言った経済学等にも応用されている。Brown 運動 (BM) の基本的な性質の一つに軌跡の交差現象がある。具体的には次の 2 種類の集合である:

ア) 単一の BM が複数回到達する点,

イ) 複数の独立な BM を走らせたとき全ての軌跡が交わる点 (異なる時刻でも良い)。

ア), イ) どちらの点も多重点と呼び, ア) では到達した回数が n 回以上のとき, イ) では走らせている確率過程が n 本するとき, その点を n 重点と呼ぶ。多重点の解析は Dvoretzky, Erdős, Kakutani, Taylor の 1950 年代の一連の研究に始まり, 確率 1 で d 次元 BM が n 重点を持つ必要十分条件は $d - n(d - 2) > 0$ であることが示された。多重点を適切に近似することで多重点に台を持つランダムな測度が構成でき, これは 1 次元 BM に対する local time とのアナロジーで intersection local time (ISLT) と呼ばれ [Le Gall (1992)] により導入された。イ) の場合について, 時刻 t までの ISLT はその時刻までの多重点の滞在分布と解釈できる。

BM や安定過程に対しては多重点の Hausdorff 次元が調べられており [Taylor (1966), Shieh (1998)], BM の多重点の Hausdorff 測度を正かつ有限の値にするゲージ関数も得られている [Le Gall (1987)] など, 詳細な解析が行われている。一方で, 一般の Markov 過程に対し何が多重点や ISLT を特徴付けているかは明らかでない部分が大多数である。

2. 研究の目的

本研究の目的は, Dirichlet 形式の理論を通して多重点や ISLT を特徴づけることである。Dirichlet 形式とは, いくつかの性質を満たした, エネルギー積分で表される L^2 空間上の 2 次形式とその定義域の組のことであり, L^2 内積と 2 次形式の和を内積として定義域は Hilbert 空間となることからその空間は単に Dirichlet 空間と呼ばれる。実関数論的对象である Dirichlet 空間は, 確率論的对象である Markov 過程と対応することが [Fukushima (1971)] により示された。例えば, Sobolev 空間 $W^{1,2}(R^d)$ に対応する確率過程は Brown 運動であり, 分数階 Sobolev 空間に対応する確率過程は安定過程である。この対応により, Riemann 多様体, 測度距離空間やフラクタルといった様々な空間の実解析, 確率論的性質が明らかになっている。

本研究は, この対応を通じて Dirichlet 空間の Sobolev-Orlicz 型の埋蔵定理と確率過程の多重点の性質との関係を明らかにするものである。

3. 研究の方法

(1) 無限回の多重点の解析

Sobolev 空間 $W^{1,2}(R^d)$ の $L^{2p}(R^d)$ への埋め込みに関する劣臨界性と BM の交差条件 $d - n(d - 2) > 0$ は対応しており, このことから, 2 次元 BM は無限回の多重点が存在し [Dvoretzky, Erdős, Kakutani (1958)], その ISLT が構成されている [Aïdécon, Hu, Shi (2020)] という確率論の結果と, 臨界 Sobolev 空間 $W^{1,2}(R^2)$ の $L^{2p}(R^2)$ への埋蔵定理に対する $p \rightarrow \infty$ でのある種の極限とも言える Trudinger-Moser 不等式との二者の関係が予想される。確率論の視点からの Trudinger-Moser 不等式に関する結果 [Bakry, Coulhon, Ledoux, Saloff-Coste (1995)] と無限回の多重点に関する先行研究 [Dembo, Peres, Rosen, Zeitouni (2001)] を基に, 臨界 Sobolev 空間と無限回の交差との関係を考察する。

(2) 確率場への応用

先行研究である [Rosen (2014)] では, マルコフ過程のグリーン関数を共分散に持つガウス自由場の $2p$ 次ウィック積で作られる確率場と, random interlacement の p 重点に関する self-intersection local time から作られる確率場との関係を表す同型定理が示されている。本研究では Dirichlet 形式と Sobolev 埋蔵定理の観点から類似の結果が得られないかを考察する。さらに, ガウス自由場のウィック積を Orlicz 空間の解析に使われる道具で一般化することで無限個のマルコフ過程に対する intersection measure との関係を探る。

4. 研究成果

(1) L^p -Kato 性, L^p -Green-tight 性の研究

確率過程の熱核(推移確率)及びGreen函数の様な L^p 可積分性に相当する L^p -Kato 性, また, それらの緊密な L^p 可積分性に相当する L^p -Green-tight 性は, 独立な p 本の確率過程の軌跡が交差する条件や交差した量を記述する intersection measure の解析に本質的な性質であると考
えられている. また, L^p -Kato 性は確率過程に対応する Dirichlet 空間の L^{2p} 空間への Sobolev
型埋め込み定理と, L^p -Green-tight 性は L^{2p} 空間への Rellich-Kondrachov 型コンパクト埋め込
み定理との関連性が本研究により 2020 年度までに得られていた. 2021 年度ではこれらの研究
成果を国内の研究集会にて発表し, 本研究課題との関連性を議論した.

(2) Random interlacement に関する研究

複数の独立なマルコフ過程の軌跡が交差した量を測る intersection measure や, その本数が
1 本の場合に相当する滞在測度は時間 t までの情報によるために定常性がない一方で, random
interlacement と呼ばれる対象は時間無限大までの軌跡をランダムにサンプルする確率場であ
るため定常性を持つ. 2021 年度では random interlacement を Dirichlet 空間の一般論の視点か
ら考察し, 反射 Dirichlet 空間や周遊理論との関係性を調べた. さらに 2022 年度では具体例と
して Newton 容量や対数容量およびそれらの平衡測度を, それぞれ対応する反射マルコフ過程の
滞在確率および到達分布で表現することができた. 新規性のある例として, 半平面上のレヴナ
ー微分方程式を構成する際に現れる半平面容量についても同様な結果を得た.

(3) 無限個の確率過程の軌跡の交差に関する研究

2023 年度では, $p=2$ の場合の交差測度について交差する点が特に集まっている場所の解析が
なされた先行研究 [Dembo, Pres, Rosen, Zeitouni (2002)] を基に, p , すなわち無限個
の確率過程の軌跡の交差について対応する交差測度の同定を Orlicz-Sobolev 埋蔵定理の観点か
ら試みた. 該当年度に行った手法では, 交差測度のサポートが広すぎる, 先行研究と異なり高
次のモーメントが計算できない, といった難点が生じたことから今後も改善手法を模索し研究
を継続する必要がある.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Mori Takahiro	4. 巻 59
2. 論文標題 Large deviation principle for the intersection measure of Brownian motions on unbounded domains	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Annales de l'Institut Henri Poincare, Probabilites et Statistiques	6. 最初と最後の頁 345-363
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1214/22-AIHP1244	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kazuhiro Kuwae, Takahiro Mori	4. 巻 -
2. 論文標題 \mathbb{L}^p -Kato class measures for symmetric Markov processes under heat kernel estimates	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00208-021-02192-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 森隆大
2. 発表標題 非有界領域上のブラウン運動に対する intersection measure の大偏差原理
3. 学会等名 関西大学確率論セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 森隆大
2. 発表標題 Interpretation of capacity by Markov processes starting from infinity
3. 学会等名 マルコフ過程とその周辺（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 森隆大
2. 発表標題 \$L^p\$-Kato class measures and their relations with Sobolev embedding theorems for Dirichlet spaces
3. 学会等名 関西大学確率論セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森隆大
2. 発表標題 Capacity, excursion around infinity and random interlacements
3. 学会等名 確率論若手セミナー・オンライン
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森隆大
2. 発表標題 Analysis of \$L^p\$-Kato class measures for symmetric Markov processes
3. 学会等名 確率解析とその周辺
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森隆大
2. 発表標題 Large deviation principle for the intersection measure of Brownian motions on unbounded domains
3. 学会等名 The 19th Symposium Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森隆大
2. 発表標題 \$L^p\$-Kato class measures and their \$L^p\$-Green-tightness for symmetric Markov processes
3. 学会等名 九州確率論セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 森隆大
2. 発表標題 \$L^p\$-Green-tightness for symmetric Markov processes and its application to the intersection measures
3. 学会等名 マルコフ過程とその周辺
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 森隆大
2. 発表標題 \$L^p\$-Kato class measures for symmetric Markov processes under heat kernel estimates
3. 学会等名 Geometry and Probability 2021 (招待講演)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

研究代表者のwebページ
<https://mori-takahiro.github.io/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------