様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　 ４ 月 ２６ 日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2021～2022
課題番号：２１Ｋ２０３２９

研究課題名（和文）高次圏論とそのホモトピー的拡張の研究

研究課題名（英文）Higher-dimensional category theory and its homotopical generalisation

研究代表者
前原　悠究（MAEHARA, Yuki）

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・学術研究員

研究者番号：８０９０５７２９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　800,000円

研究成果の概要（和文）：圏論は「数学的対象Xの代数的理解は、Xと他の対象Yとの関係性を調べることで得られる」という考え方をベースにする数学の分野です。代数的な理解だけでなく、Xの幾何的理解も得たい場合は「XとYの関係性」だけでなく「XとYの関係性同士の関係性」等の高次元な関係性についても考える必要があり、こういった圏論を特に高次圏論と呼びます。次元が増える分、どうしても高次圏論は煩雑になりがちですが、本研究では「どのようにしたら高次圏論における計算を簡単にできるか」についての理解を深めました。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究は高次圏論と呼ばれる分野の基礎となる部分を固めるものです。より具体的には、高次圏論への異なるアプローチが本質的には同じ理論に繋がっていることを示したり、また高次圏に関する計算を簡単にする方法を確立したりしました。高次圏論は幾何的な性質を持つ数学分野を抽象的に扱うためのものなので、今回の結果は将来的に幾何の理解を深める役に立つことが期待されます。また高次圏論は、量子計算と深い関わりのある位相場理論や、計算機の合流性と呼ばれる性質について考えるための言語として使われることもあり、そういった動機からも高次圏論について理解を深める意義があります。

研究成果の概要（英文）：Category theory is a branch of mathematics based on the idea “to understand an algebraic object X is to understand how X relates to other objects Y”. If one is interested in X not merely as an algebraic object but something with geometric structure, one must also take into account higher dimensional relationships, such as how different relationships between X and Y relate to each other. Such study is called higher category theory. The increase in the number of dimensions often complicates computations involved in higher category theory, and the aim of this project was to simplify them in certain cases.

研究分野：高次圏論

キーワード：高次圏　(∞,n)圏

１．研究開始当初の背景

圏論は代数を抽象的に記述するのに便利な言語である．例えば圏論におけるモナドは普遍代数の抽象化として見ることができるし，また随伴関手は自由群や自由代数と言った時の自由性の抽象化と見ることができる．では圏論自体を抽象的に記述するためにはどのような言語が必要になるだろうか．圏論も一種の代数ではあるものの，実は圏論自身について記述するためには通常の圏論では不十分であり，次元を 1 つ上げた 2 圏論が必要になることが知られている．例えば上で触れたモナドや随伴関手といった概念は，1 圏ではなく 2 圏的な構造の中でしか意味を成さない．つまり圏論が代数の抽象化であることと同様に，2 圏論とは圏論の抽象化であり，また一般に n 圏論とはこの抽象化を n 回繰り返すことによって得られるものである．n 圏論を研究する動機としては，こういった純圏論的なものの他にも非アーベルなコホモロジーや位相的場の理論，また計算機科学における項書き換えとの関連性が知られている．
この n 圏論をホモトピー的に拡張したものが(∞, n)圏論である．そもそもホモトピー的文脈においては，代数的構造を『正しく』扱うことは困難であることが知られている．例えば単位球面 S^2 は非可縮であるにも関わらず自明な（つまり『正しくない』）基本群$\pi_1(S^2, *)$ を持つ．これは基本群を代数的に厳密な意味での群にするために，ホモトピーで割ってしまっていることが原因であると考えることができる．この場合におけるホモトピー的に『正しい』代数的構造$\pi_\infty(S^2, *)$は，S^2 の赤道上を通るループから定数ループへのホモトピー（つまり 2 次元的な情報）が「単に存在する」だけではなく「(少なくとも）北半球と南半球の 2 種類存在する」ことを記録することによって，S^2 と単集合を見分けることが求められる．同様に，$\pi_\infty(X)$ は任意の n に対して n 次元的な情報を記録している必要があり，その構造は∞亜群と呼ばれる非常にややこしいものになる．
このように直接扱い難いホモトピー的構造に対して，抽象的に扱う手段を提供するのが(∞, n)圏論である．よって通常の n 圏論が与える代数の理解，例えば形式的モナド理論や Gray テンソルを用いたモナドの合成を，(∞, n) 圏を通してホモトピー的な文脈に拡張することが求められる．
本研究は「n 圏に関して知られているこれらの定理や操作は，実際に(∞, n) 圏に『正しい』形で拡張できるのか」という本質的な問いに肯定的な答えを与えることを目的に遂行された．

２．研究の目的

【(∞,n) 圏の Gray テンソルについて】
Gray テンソルとは m 圏 A と k 圏 B に対して $A\otimes B$ が$(m + k)$圏になるようなテンソル積のことで，n 圏論において重要な lax 変換と非常に深い関係がある．また上記のように次元に対して良い性質を持つことから，enrichment 等の次元を『ズラす』操作について考える際にも必要になるテンソル積である．(∞,n)圏論は様々な形を基にしたアプローチが存在するが，その中でも simplicial なものや cubical なものに対しては Gray テンソルが定義されている．また $n = 2$ の場合に限定すれば, cellular な定義も与えられている．しかしこれらの Gray テンソルが, n 圏の Gray テンソルと適当な意味で同値であることは未だ証明されていない．申請時，本研究ではこの同値性を，ある程度一般な n 圏に対して示すことを目的としていた．

【形式的モナド理論について】
圏論における基本的な概念の１つであるモナドは，普遍代数やコンパクトなハウスドルフ空間など，様々な構造を「代数」として扱うことを可能にする．通常は任意の圏上に定義されるモナドだが，より一般に任意の 2 圏の内部におけるモナドを定義することができる．2 圏論的なモナド理論（= 形式的モナド理論）において各モナドに対応する代数圏を抽象化する際には，重み付き極限と lax 極限の 2 種類の見方が考えられる．従来の圏論におけるモナドやその代数圏の深い理解は，この 2 つの視点を組み合わせることによって得られている．申請時，本研究では$(\infty,2)$圏内部のモナドに関しても同様のアプローチが成り立つ、つまり「$(\infty, 2)$ 圏的な重み付き極限と lax 極限が実際に同じ対象を特徴付ける」ことの証明を目的としていた．

３．研究の方法

【(∞,n) 圏の Gray テンソルについて】
そもそも(∞,n)圏へのアプローチには simplicial、cubical、cellular 等の種類があり、それぞれのアプローチで独立した Gray テンソルの定義が知られていた．　既に simplicial な Gray テン

ソルに関しては先行研究が存在していたが、Gray テンソルは本質的に cubical なものであるため、cubical な(∞,n)圏を用いた方が扱い易いと考えた。そこで本研究では先行研究を今後の研究に応用する準備として、Brandon Doherty 氏（当時 University of Western Ontario, 現在 Stockholm University）と Krzysztof Kapulkin 氏（University of Western Ontario）との共同研究で、simplicial な Gray テンソルと cubical なものの比較を行った。具体的には、triangulation functor を用いた cubical な(∞,n)圏の simplicial な(∞,n)圏への変換が存在し、さらにその変換の前後で Gray テンソルという概念がホモトピー的には保たれていることが先行研究から知られていたため、triangulation functor が適切な意味での同値関係を与えるのではないかと考えた。またその証明には、n=1 の場合と同様に cubification functor を用いた。
また Timothy Campion 氏(Johns Hopkins University)との共同研究では、cellular な(∞,2)圏の Gray テンソルと 2 圏の Gray テンソルを比較した。その証明の中では、(∞,1)圏の Day 拡張を用いた。

【(∞,n)圏自体について】
形式的モナド理論については、研究を進める中で準備不足を感じたため、基礎となる(∞,n)圏自体の理解を求めて多角的なアプローチを試した。具体的には、まず simplicial な(∞,n)圏の理解を深めるため、standard simplex から自由に生成される(∞,n)圏について研究した。
また n 圏と(∞,n)圏のどちらとも深い関係を持つことが期待される代数的高次圏について、藤井宗一郎氏（Macquarie University）と星野恵佑氏（京都大学）との共同研究を行った。代数的高次圏と n 圏との関係については比較的理解が簡単だったため、主に(∞,n)圏との関係に集中し、具体的には代数的高次圏の圏にモデル構造を導入できないか考えた。

４．研究成果

Doherty 氏と Kapulkin 氏との共同研究では、triangulation functor と cubification functor が適切な同値関係、つまりモデル圏間の Quillen 同値を与えることの証明に成功した。またその証明の中で新たな trivial cofibration が必要になることに気付いたため、モデル構造に若干の変更が必要になったが、それ以外は概ね想定通りのアプローチが成功した。この結果は査読付きの学術雑誌（Advances in Mathematics）に掲載済みである。

Campion 氏との共同研究では、Gray 超立方体と呼ばれる比較的シンプルな 2 圏について「m 次元超立方体と n 次元超立方体のテンソルは(m+n)次元超立方体である」と定義することで、一般の(∞,2)圏の Gray テンソルを(∞,1)圏的な Day 拡張で得られることを示した。この結果はまだ投稿していないものの、論文としては完成している。

Starndard simplex に関する研究については、standard simplex から自由に生成される n 圏である oriental が、(∞,n)圏としても自由に生成されていることを、組み合わせ論的な議論で示した。この結果については、既に内容をまとめた論文が査読付きの学術雑誌（Journal of Pure and Applied Algebra）に掲載済みである。

藤井氏と星野氏との共同研究における最終的な目標はモデル構造の導入だが、現在は準備段階の研究を行っている。特に余帰納的な可逆射が合成について閉じていることの証明に成功したため、論文としてまとめ、査読付きの学術雑誌に投稿している。

これらの結果は(∞,n)圏やその Gray テンソルについて研究するうえで基礎となるようなものであり、今後の研究に役立つことが期待される。また現状で得られている結果だけでも十分興味深いものであり、国内外の学会やワークショップで講演した際に肯定的な反応やフィードバックを得られた。

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 Yuki Maehara	4．巻 227
2．論文標題 Orientals as free weak ω-categories	5．発行年 2023年
3．雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6．最初と最後の頁 ―
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jpaa.2022.107230	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 ―

1．著者名 Doherty Brandon, Kapulkin Krzysztof, Yuki Maehara	4．巻 416
2．論文標題 Equivalence of cubical and simplicial approaches to (∞,n)-categories	5．発行年 2023年
3．雑誌名 Advances in Mathematics	6．最初と最後の頁 ―
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aim.2023.108902	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　0件／うち国際学会　2件）

1．発表者名 Yuki Maehara
2．発表標題 Coinductive equivalences in algebraic weak ω-categories
3．学会等名 The 66th Annual Meeting of the Australian Mathematical Society（国際学会）
4．発表年 2022年

1．発表者名 前原 悠究
2．発表標題 Coinductive equivalences in algebraic weak ω-categories
3．学会等名 理論計算機科学と圏論ワークショップ CSCAT 2023
4．発表年 2023年

1．発表者名 Yuki Maehara
2．発表標題 Orientals as free weak ω-categories
3．学会等名 Category Theory CT20→21（国際学会）
4．発表年 2021年

1．発表者名 前原 悠究
2．発表標題 Equivalence of cubical and simplicial approaches to weak ω-categories
3．学会等名 代数，論理，幾何と情報科学研究集会 ALGI 32
4．発表年 2021年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
スウェーデン	Stockholm University			
オーストラリア	Macquarie University			
米国	Johns Hopkins University			
カナダ	University of Western Ontario			