様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　 ６ 月 １２ 日現在

機関番号：３２６３８
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2021～2023
課題番号：２１Ｋ２０３３３
研究課題名（和文）異常拡散現象における均質化法とその逆問題への応用

研究課題名（英文）Homogenization in Anomalous Diffusion Phenomena and its Applications to Inverse Problems

研究代表者
川本　敦史（Kawamoto, Atsushi）

拓殖大学・工学部・准教授

研究者番号：１０９１００５２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：土壌汚染において，有害物質が土壌の中で拡散する様子は，通常の拡散と異なり，異常拡散現象と呼ばれている．この異常拡散現象を記述する時間非整数階拡散方程式に着目し，この方程式に対する均質化法とその逆問題への応用について研究を行った．
具体的には，周期的な構造と均質化された構造間の係数決定逆問題を新たに提案し，均質化法の結果などを組み合わせることで，この異なる構造間の逆問題における一意性・安定性の導出に成功した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
学術的意義：時間非整数階拡散方程式に対する均質化法の数学的に厳密な議論による結果は先駆的研究のひとつである．また，本研究で新たに提案した周期的な構造と均質化された構造との異なる構造間の逆問題とその数学解析の結果は，今まで存在せず，学術的に独創性がある．
社会的意義：本研究は土壌汚染の問題に応用可能であり，数学的に厳密な理論的保証を与えるものである．また，土壌汚染における汚染の予測や汚染源の除去など現実の問題解決に効果的な指針を示すことが期待できる．

研究成果の概要（英文）：In soil contamination, the diffusion of contaminants in soil is different from classical diffusion and is called anomalous diffusion. We focused on time-fractional diffusion equations which describe anomalous diffusion, and studied the homogenization for the time-fractional diffusion equations and its applications to inverse problems.
In particular, we proposed new inverse coefficient problems between a periodic structure and a homogenized one, and succeeded in deriving the uniqueness and the stability in the inverse problems between these different structures by using the results of the homogenization and others.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：逆問題　数理モデル　異常拡散現象　非整数階拡散方程式　均質化法

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様　式　C－１９、F－１９－１（共通）

１．研究開始当初の背景

本研究の背景は，土壌汚染問題である．土壌は砂や小石などの物質から成る不均質な複合媒体であり，土壌汚染は有害物質の不均質複合媒体における拡散現象として物理的に捉えることができる．古典的な拡散方程式によって記述される通常の拡散現象では，物質の濃度が時間に関して指数関数的に減衰する．しかし，この拡散現象では，実験室における試験やフィールドデータから，物質の濃度が時間に関して多項式的に減衰することが知られている．したがって，この拡散現象は，通常の拡散現象と異なるため，異常拡散現象と呼ばれている．本研究では，この異常拡散現象を記述する数理モデル式のひとつとして知られている時間非整数階拡散方程式に着目し，この方程式に対する均質化法とその逆問題への応用を研究した．研究開始当初は，時間非整数階拡散方程式の数学解析は未だに発展途上であり，その研究は学術的に先駆的研究となることが見込めるものであった．

２．研究の目的

本研究は，異常拡散現象の理解を深め，現実世界の現象への応用を目指すものである．

土壌汚染の原因となる汚染源を直接的に観測することはしばしば困難である．そこで，本研究の目的は，土壌汚染において，拡散の様子を決める物理係数（拡散係数）を有害物質の影響の少ない時刻・場所で得た観測データから数学的に解明することである．

特に，異常拡散現象に対して，周期的な構造から均質化された構造を得る数学的手法（均質化法）と逆問題の数学解析の手法を組み合わせることにより，周期的な構造と均質化された構造との異なる構造間の逆問題（すなわち，異なるスケールのマルチスケールの逆問題）を新たに提案し，その逆問題を解くことに重点を置き研究を行った．

３．研究の方法

本研究では，異常拡散現象における異なる構造間の逆問題の解明を目指す上で，以下の(A)から(E)までの手順で研究を遂行した．

(A) 時間非整数階拡散方程式に対する均質化法のための数学的道具の準備
(B) 時間非整数階拡散方程式に対する均質化法
(C) 周期的な構造と均質化された構造における拡散係数の関係式の導出
(D) 拡散係数が定数の場合の時間非整数階拡散方程式に対する定数係数決定逆問題の解明
(E) 異なる構造間の時間非整数階拡散方程式に対する係数決定逆問題の解明

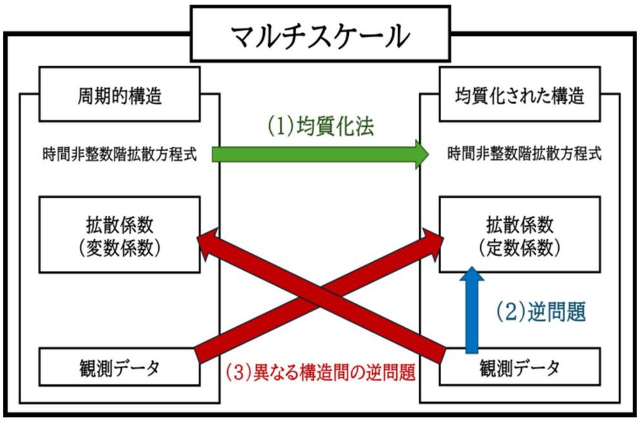
本研究では，主な研究の方法として，(1)均質化法と(2)逆問題の数学解析の手法を採用しており，以下ではそれらについて具体的に述べる．

(1)均質化法：土壌などの複合的な物質における物理現象は，異なるスケールから見ることにより，その不均質な構造（しばしば周期性を仮定し，周期的な構造を考える）と大域的挙動を記述する均質化された構造によって特徴づけられる．均質化法とは，関数解析を用いて，この複合媒体における周期的な構造から均質化された構造を得る数学的手法であり，マルチスケールの解析手法として知られている．通常の拡散方程式に対する均質化法の結果はあるものの，本研究に関連する時間非整数階拡散方程式に対する結果は少なく，関数解析を用いて厳密に議論されたものはなかった．そのため，通常の拡散方程式に対する均質化法の既知の結果を参考に，振動試験関数法と呼ばれる均質化法の手法のひとつを用いて，周期的な構造における時間非整数階拡散方程式から均質化された構造における時間非整数階拡散方程式を導出した．

(2)逆問題の数学解析の手法：逆問題とは，直接測ることができないものを知りたい，結果から原因を推定したい，物理法則や支配方程式を決定したい，物理係数を知りたい等の発想をもとにした諸問題のことである．逆問題の数学解析における課題として，逆問題における一意性・安定性の研究がある．観測データが一致しているとき，物理係数や源泉項も必ず一致していることを逆問題における一意性といい，観測データが変動するとき，それに応じて物理係数や源泉項も連続的に変動することを逆問題における安定性という．また，物理係数や源泉項の変動を観測データの変動で定量的に評価し，安定性を表す不等式を得ることを逆問題における安定性評価という．本研究では，まず拡散係数が定数の場合の時間非整数階拡散方程式に対して，ある時刻の空間内の１点における最小限のデータから定数拡散係数を決定する逆問題を考えた．逆問題を解く手法は様々あるが，本研究では時間非整数階拡散方程式の解の固有関数展開，時刻や特定のパラメータに関する解析性，最大値原理などを用いることで，定数拡散係数決定逆問題の一意性・安定性および安定性評価を得た．また，均質化法で得られた解の収束性や周期的な構造と均質化された構造における拡散係数の関係式と定数拡散係数決定逆問題の結果を組み合わせることで，異なる構造間の逆問題における一意性・安定性および安定性評価を得ることに成功した．

４．研究成果

本研究の研究成果は以下の３点から成る：(1)時間非整数階拡散方程式に対する均質化法，(2)拡散係数が定数の場合の時間非整数階拡散方程式に対する係数決定逆問題，(3)異なる構造間の時間非整数階拡散方程式に対する係数決定逆問題．以下ではそれらについて説明する．なお，右図は本研究の成果を図に示したものであり，図中の番号は本研究の成果の番号と対応している．



(1) 時間非整数階拡散方程式に対する均質化法：空間多次元の場合を考え，振動試験関数法と呼ばれる均質化法の手法のひとつを用いて，周期的な構造における時間非整数階拡散方程式から均質化された構造における定数拡散係数の時間非整数階拡散方程式を得た．具体的には，周期的な構造における時間非整数階拡散方程式の初期値境界値問題の解が均質化された構造における時間非整数階拡散方程式の初期値境界値問題の解にいくつかの関数空間で適当な意味で収束することを示した．また，空間１次元の場合と層状媒質の場合（拡散係数がひとつの空間変数のみに依存していると仮定できる場合）に周期的な構造と均質化された構造における拡散係数の関係式を導出した．時間非整数階拡散方程式に対する均質化法の研究は極めて少なく，関数解析を用いた数学的に厳密な議論を行ったものはなかった．したがって，本研究は，時間非整数階拡散方程式に対する均質化法の研究としても先駆的なものである．

(2) 拡散係数が定数の場合の時間非整数階拡散方程式に対する係数決定逆問題：均質化された構造における時間非整数階拡散方程式の拡散係数は定数となるため，ある時刻の空間内の１点における最小限のデータからこの定数拡散係数を決定する逆問題を考えた．時間非整数階拡散方程式の解の固有関数展開，時刻や特定のパラメータに関する解析性，最大値原理などを用いて,定数拡散係数決定逆問題における一意性と安定性および安定性評価を得ることに成功した．また，空間内のある１点でのデータをある程度の時間観測することができれば，弱い仮定の下で逆問題における一意性を示すことができた．

(3)異なる構造間の時間非整数階拡散方程式に対する係数決定逆問題:異なる構造間の逆問題として以下の２つの逆問題を考えた．
①周期的な構造における観測データから均質化された構造における拡散係数を決定する逆問題
②均質化された構造における観測データから周期的な構造における拡散係数を決定する逆問題
これらの逆問題①と②に対して,空間１次元の場合と層状媒質の場合に(1)で得られた解の収束性や周期的な構造と均質化された構造における拡散係数の関係式と(2)の定数拡散係数決定逆問題の結果を組み合わせることで，周期的な構造と均質化された構造との異なる構造間の逆問題（マルチスケールの逆問題）における一意性と安定性および安定性評価を導くことに成功した．一方，空間多次元で拡散係数がより一般的な形の場合，異なる構造間の逆問題は未解決であり，その解決は今後の課題である．

本研究で行ったマルチスケールを考慮した均質化法の逆問題への応用の研究は，今のところ知られておらず，学術的に独創性のある研究である．また，本研究の結果は，土壌汚染の問題に応用可能であり，数学的に厳密な理論的保証を与えるものである．また，汚染の予測や汚染源の除去などの現実の問題解決に効果的な指針を示すことが期待できる．

以上の(1)～(3)の時間非整数階拡散方程式に対する均質化法とその逆問題への応用に関する研究成果は，48 ページに及ぶ共著論文[1]（責任著者として執筆）として学術論文誌に掲載された．また，香港で開催された国際会議のミニシンポジウムに招待され，本研究の成果について講演を行った．

今後の研究の展開としては，時間非整数階波動方程式など様々な物理現象を記述する偏微分方程式にも焦点を当て，均質化法とその逆問題への応用に取り組む．これにより，より広範な現象に対する理解を深め，新たな応用の可能性を探求する予定である．

＜引用文献＞

[1] Atsushi Kawamoto, Manabu Machida, Masahiro Yamamoto, Homogenization and inverse problems for fractional diffusion equations, Fractional Calculus and Applied Analysis 26 (2023) 2118-2165.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Kawamoto Atsushi、Machida Manabu、Yamamoto Masahiro	４．巻 26
２．論文標題 Homogenization and inverse problems for fractional diffusion equations	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Fractional Calculus and Applied Analysis	６．最初と最後の頁 2118～2165
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13540-023-00195-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計1件（うち招待講演　1件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 Kawamoto Atsushi
２．発表標題 Homogenization and Inverse Problems for Fractional Diffusion Equations
３．学会等名 Minisymposium [MS02] Inverse problems and related topics for evolution equations (at The Second HKSIAM Biennial Meeting)（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関