

令和 5 年 6 月 21 日現在

機関番号：32660

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2021～2022

課題番号：21K20337

研究課題名（和文）離散シュレディンガー作用素の散乱理論と連続極限

研究課題名（英文）Scattering theory and continuum limits of discrete Schrodinger operators

研究代表者

只野 之英 (Yukihide, Tadano)

東京理科大学・理学部第一部数学科・助教

研究者番号：90908427

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,100,000円

研究成果の概要（和文）：離散シュレディンガー作用素は結晶固体中の自由電子の挙動を記述するモデルであると同時に、連続空間上のシュレディンガー作用素の離散化とみなすこともできる。本研究では、離散シュレディンガー作用素およびその他の応用上重要な離散モデルである量子グラフ、量子ウォークのスペクトル・散乱理論的性質を明らかにした。その結果、これらの作用素とシュレディンガー作用素との類似性、相違性を見出すことができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の対象である離散シュレディンガー作用素および量子グラフ、量子ウォークは応用上重要な数理モデルとして知られており、本研究はこれらの数理モデルの元になった現象の理解を深めると考えられる。また、離散シュレディンガー作用素の連続極限を数学的に厳密に扱った研究は非常に少なく、本研究の結果は連続系のシュレディンガー作用素の固有値、固有ベクトルの数値計算の理論面からの正当化の一助になると考えられる。

研究成果の概要（英文）：Discrete Schrodinger describe behaviors of free electrons in a crystalline solid, as well as they are regarded as the discretization of the Schrodinger operators. In this research, I have studied the spectral and scattering theory of discrete Schrodinger operators and some other discrete models, e.g., quantum graphs and quantum walks, which tells us similar and different features of them when compared to continuum Schrodinger operators.

研究分野：スペクトル・散乱理論

キーワード：離散シュレディンガー作用素 スペクトル・散乱理論 連続極限 格子

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

離散シュレディンガー作用素 H は、グラフ Γ 上の差分ラプラシアン Δ_Γ とポテンシャル V を用いて $H = -\Delta_\Gamma + V$ と表される。同作用素は固体物理で現れ、原子からなる結晶内の存在する自由電子の挙動を記述する作用素として提案された。離散シュレディンガー作用素は考察するグラフの形状(正方格子、六角格子、カゴメ格子など)によって作用素の性質が異なることが知られている。

トポロジカル物性の発見以来、グラフェンシートをはじめとした素材の数理モデルとして、離散シュレディンガー作用素は物理学者のみならず数学者の研究対象にもなっている。この文脈において、離散シュレディンガー作用素は連続空間上で定義される通常のシュレディンガー作用素とは異なる性質を持つことが期待されながら研究されている。一方、離散シュレディンガー作用素はシュレディンガー作用素の離散近似ともみなせるため、両者の間に類似性があると予想するのは自然である。実際、研究代表者のこれまでの研究で離散シュレディンガー作用素と連続空間上のシュレディンガー作用素の間の類似性、相違性の双方を、スペクトル・散乱理論の文脈で明らかにしている。

以上の背景から、離散シュレディンガー作用素の上で述べた文脈での更なる研究、特に格子の形状との関連や磁場の効果の導入といった応用上重要な状況下での解析を主眼において研究をする必要があると考えた。それと同時に、シュレディンガー作用素の別の離散化として知られる量子グラフ(グラフの辺上のシュレディンガー作用素)やランダムウォークの量子版である量子ウォークの解析に研究代表者の今までのスペクトル・散乱理論の手法が効果的であるとも考え、本研究の開始に至った。

2. 研究の目的

離散シュレディンガー作用素のスペクトル・散乱理論の研究およびその解析手法の他モデルへの応用を行う。具体的には以下の通りである。

(1) 連続極限における格子の形状依存性解析

一般の格子状の離散シュレディンガー作用素の連続極限を研究し、連続極限の収束速度が格子の形状にどのように依存するか解析を行う。また、別の離散化である量子グラフに対しても連続極限を考察し、その極限がシュレディンガー作用素になるか否かを明らかにする。

(2) 磁場付き離散シュレディンガー作用素のスペクトル・散乱理論

離散シュレディンガー作用素に磁場を印加した磁場付き離散シュレディンガー作用素に対してスペクトル・散乱理論の研究を行う。

(3) 長距離散乱理論の手法の量子ウォークへの応用

離散シュレディンガー作用素の長距離散乱理論で用いた手法を量子ウォークに応用し、長距離散乱理論の構築を行う。

3. 研究の方法

(1) 連続極限における格子の形状依存性解析

離散空間上の作用素である離散シュレディンガー作用素を連続空間上のシュレディンガー作用素と比較するためには両者が関わる関数空間の間の適切な変換を用意する必要があるため、第1段階として上記の適切な変換の候補を絞り込む。その後、第2段階では第1段階で絞り込んだ変換を用いて、格子幅を0に近づける極限で離散シュレディンガー作用素が一般化されたノルムレゾルベント収束の意味で通常のシュレディンガー作用素に収束することの証明を試みる。最終的に第3段階として、格子の種類に応じて連続極限における収束速度の違いが現れるか、またその違いがグラフの構造とどのような関係があるのかを明らかにする。

上の計画と同時並行で、量子グラフの場合での連続極限の研究を進行させる。量子グラフの連続極限の先行研究は(一般化されたノルムレゾルベント収束の意味では)存在しないため、正方格子の場合での証明を試みる。その際、正方格子上の離散シュレディンガー作用素の連続極限はすでに得られていることから、量子グラフと離散シュレディンガー作用素との間の連続極限の問題に帰着されるので、その証明を行う。その後、離散シュレディンガー作用素の連続極限の研究が一般の格子の場合まで完了し次第、量子グラフの連続極限においても一般の格子の場合の証明を行う。

(2) 磁場付き離散シュレディンガー作用素のスペクトル・散乱理論

一般の格子上の離散シュレディンガー作用素に遠方で減衰する磁場ポテンシャルを摂動させたときのスペクトル・散乱理論を研究する。この場合ではワイルの定理と極限吸収原理がこれまでの研究で用いた手法で示せるため、絶対連続スペクトルが摂動に対して不変である。したがって、本研究計画では波動作用素(長距離型摂動の場合は修正波動作用素)の存在、完全性の証明を試みる。

(3) 長距離散乱理論の手法の量子ウォークへの応用

今までの研究(一般の格子上の離散シュレディンガー作用素の長距離散乱理論)で用いた手法を応用して、量子ウォークにおいてコイン作用素に長距離型の摂動を加えたときの散乱理論を研究する。具体的には、上記の条件下で修正波動作用素を構成し、その存在および完全性を証明する。

4. 研究成果

正方格子の場合に量子グラフの連続極限としてユークリッド空間上のシュレディンガー作用素が得られることを証明した。同結果は論文誌「Letters in Mathematical Physics」に掲載された。

一般の格子上の離散シュレディンガー作用素の連続極限についても、三角格子などの \mathbb{Z}^d と同様な格子の場合および六角格子に対して結果が得られた。同結果は近日中に論文にして公開予定である。今後の課題として、上記の仮定を満たさない格子の場合での証明が挙げられる。

磁場付きシュレディンガー作用素および量子ウォークの長距離散乱理論についても、肯定的な結果を得られた。両者ともに近日に論文として公開予定である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Exner Pavel, Nakamura Shu, Tadano Yukihide	4. 巻 112
2. 論文標題 Continuum limit of the lattice quantum graph Hamiltonian	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11005-022-01576-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 7件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 只野之英
2. 発表標題 離散シュレディンガー作用素における長距離散乱理論
3. 学会等名 RIMS共同研究（グループ型A）線形及び非線形分散型方程式に関する多角的研究（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 只野之英
2. 発表標題 離散シュレディンガー作用素における長距離散乱理論
3. 学会等名 熊本大学応用解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 只野之英
2. 発表標題 量子グラフ上のシュレディンガー作用素における連続極限
3. 学会等名 2022年夏の作用素論シンポジウム
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Pavel Exner, 中村周, 只野之英
2. 発表標題 Continuum limit of the lattice quantum graph Hamiltonian
3. 学会等名 2022年度日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 只野之英
2. 発表標題 Continuum limit of the lattice quantum graph Hamiltonian
3. 学会等名 神楽坂における偏微分方程式セミナー 2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 只野之英
2. 発表標題 離散シュレディンガー作用素の連続極限について
3. 学会等名 九州大学数理物理セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 只野之英
2. 発表標題 Continuum limit problem of discrete Schrodinger operators on square lattices
3. 学会等名 東京大学解析学火曜セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 只野之英
2. 発表標題 一般格子上の離散シュレディンガー作用素の長距離散乱理論
3. 学会等名 微分方程式の総合的研究 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yukihide Tadano
2. 発表標題 Continuum limit problem of discrete Schrodinger operators
3. 学会等名 Himeji Conference on Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 只野之英
2. 発表標題 離散シュレディンガー作用素における長距離散乱理論
3. 学会等名 Critical Exponent and Nonlinear Partial Differential Equations 2022 (招待講演)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>只野 之英 教員紹介 - 東京理科大学 理学部第一部数学科 https://math-1.ma.kagu.tus.ac.jp/faculty-member/%E5%8F%AA%E9%87%8E-%E4%B9%8B%E8%8B%B1/ 只野 之英 - 東京理科大学 https://www.tus.ac.jp/academics/teacher/p/index.php?7469</p>
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------