

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：11301

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2021～2023

課題番号：21K21278

研究課題名（和文）グラフの構造的パラメータに基づく汎用的アルゴリズムの構築

研究課題名（英文）Development of Generic Algorithms Based on Graph Structural Parameters

研究代表者

田村 祐馬 (Tamura, Yuma)

東北大学・情報科学研究科・助教

研究者番号：30907457

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000円

研究成果の概要（和文）：グラフ上の組合せ最適化問題に対し、グラフの構造的パラメータの観点から効率的なアルゴリズムの構築、及び計算困難性の証明を行った。研究当初はグラフアルゴリズム分野において中心的な問題である最大クリーク問題を主に取り扱い、特定の構造的パラメータにおいて計算複雑性の境界を与えた。さらに、最大クリーク問題を扱う際に得られた手法を汎用的な手法に拡張することにより、一般化された問題である最大誘導部分グラフ問題に対する計算複雑性も明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究で得られたアルゴリズム及び困難性を証明する手法は、特定の性質を持つ任意の問題に対して適用可能である、という点で高い汎用性を持つ。本研究成果により、問題が特定の性質を持つかどうかを確認するだけで、本研究で扱った構造的パラメータに関して効率的なアルゴリズムが構築できそうかどうか判断が可能となった。これは構造的パラメータの分野における研究を大きく促進するものである。また、既存研究において組合せ最適化問題が扱いやすいと経験的に知られていたグラフに対して、扱いやすいための共通構造を発見した。よって本研究はグラフ理論分野の発展にも貢献できたと考えられる。

研究成果の概要（英文）：For combinatorial optimization problems on graphs, we have developed efficient algorithms and proven the computational hardness from the perspective of graph structural parameters. Initially, our research focused on the maximum clique problem, which is a central problem in the field of graph algorithms, and provided the complexity dichotomy for specific structural parameters. Furthermore, by extending the methods for the maximum clique problem, we also revealed the computational complexity of a more generalized problem, the maximum induced subgraph problem.

研究分野：アルゴリズム

キーワード：グラフアルゴリズム グラフ理論 組合せ最適化 固定パラメータ容易性 最大誘導部分グラフ問題

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

### 1. 研究開始当初の背景

実社会上の多種多様な課題は、グラフ上の組合せ最適化問題として表現可能である。しかし、その多くは NP 困難、すなわち問題を高速に解くアルゴリズムが存在しそうでない、ということが知られている。それでもなお、ある制約を仮定して NP 困難な問題を効率的に解こうとする試みがアルゴリズム分野において研究されてきた。グラフの構造的パラメータを基にしたアルゴリズムは、そのような試みの 1 つである。グラフの構造的パラメータとは、グラフの構造的特徴を数値化したもののことである。「木幅」は様々なグラフの構造的パラメータのうち、最もグラフ理論分野・アルゴリズム分野において貢献を与えたものと言えよう。特に、木幅に関する研究の中心的存在である Courcelle の定理は、入力グラフの木幅が小さいとき、特定の性質を持っている任意の問題は効率的に解けるということを述べている。この Courcelle の定理により、我々があるグラフ上の組合せ最適化問題に直面した時、「入力グラフの木幅が小さいこと」及び「問題が特定の性質を持っていること」の 2 つさえ確認すれば、自動的に効率的なアルゴリズムが得られる。実際、最大独立集合問題、最大クリーク問題、最小支配集合問題、ハミルトン閉路問題、3 彩色問題といった、グラフアルゴリズム分野において基礎的な問題の多くは、Courcelle の定理が適用可能な性質を持っている。すなわち、Courcelle の定理は、木幅が小さいグラフにおける統一的なアルゴリズムを与えたと言える。これが、Courcelle の定理が木幅研究の中心的存在と言われるゆえんである。

しかし、どのようなグラフも木幅が小さいわけではない。辺の数が少ない疎なグラフであれば木幅は小さくなりうるが、辺の数が多き密なグラフは木幅が大きくなることが知られている。このような場合、Courcelle の定理は適用不可能である。この課題に対処すべく、密なグラフに対しても値が小さくなる汎用的な構造的パラメータがここ十年ほどで様々な提案され、それらパラメータを基にした効率的なアルゴリズムが考えられてきた。しかし、統一的なアルゴリズムの理論は発展段階にあった。

### 2. 研究の目的

本研究では、疎なグラフ及び密なグラフ、両方に対して数値が小さくなるような、汎用性の高い構造的パラメータを考える。その上で、Courcelle の定理のように、特定の性質を持った任意の問題に対して適用可能な統一的アルゴリズムの構築を目指す。これにより、Courcelle の定理が適用不可能であったグラフ構造に対しても、多様な問題の効率的なアルゴリズムを与えることが可能となる。一方で、適用可能なグラフが拡張された代償として、適用可能な問題の範囲は狭まってしまうことが予想される。例えば、クリーク幅と呼ばれる、木幅よりも汎用的な構造的パラメータに対して、統一的なアルゴリズムを構築する試みが既存研究で行われ、十分な成功を収めた。しかし、Courcelle の定理が適用可能だったハミルトン閉路問題に対して、クリーク幅を基にした効率的なアルゴリズムは構築できそうでない、ということも判明した[1]。つまり、構造的パラメータの汎用性と、そのパラメータに基づく統一的アルゴリズムが構築可能な組合せ最適化問題の範囲は、トレードオフの関係性にあると考えられる。そこで、本研究ではアルゴリズムの構築と同時並行的に、構造的パラメータを基にしたアルゴリズムの理論的境界を探求する。これにより、統一的なアルゴリズムを構築する上で組合せ最適化問題に必要な性質が明らかとなる。

[1] F.V. Fomin, P.A. Golovach, D. Lokshantov, S. Saurabh, "Intractability of clique-width parameterizations," SIAM Journal on Computing, vol.39(5), pp. 1941-1956, 2010.

### 3. 研究の方法

本研究では主に「mim 幅」と呼ばれる構造的パラメータに着目した。木幅やクリーク幅が小さいグラフは mim 幅も小さくなることが知られている。また、区間グラフ、置換グラフ、距離遺伝グラフと呼ばれるグラフたちは、木幅やクリーク幅は大きくなりうるが、mim 幅は極めて小さいことが知られている[2]。すなわち、mim 幅は木幅やクリーク幅よりも汎用的なパラメータであると言える。区間グラフ、置換グラフ、距離遺伝グラフに対しては Courcelle の定理が適用できないものの、グラフアルゴリズム分野における経験則的に、これらグラフ上では多くの組合せ最適化問題が高速に解けると知られている。このことから、mim 幅が小さいグラフにおいても Courcelle の定理のような統一的アルゴリズムが構築できるのではないかと考えた。事実、文献[3]では、mim 幅が小さいグラフが与えられたとき、LCVP (locally checkable vertex partitioning problems) という枠組みに当てはまる問題全てに対して高速に動作するアルゴリズムを与えている。そこで、本研究では文献[3]を調査し、効率的なアルゴリズムを達成するための根幹となる手法を解析した。また、mim 幅の概念を提唱した文献[4]を調査し、mim 幅が小さくなるようなグラフの特徴について解析を行った。

[2] R. Belmonte, M. Vatshelle, "Graph classes with structured neighborhoods and algorithmic applications," Theoretical Computer Science, vol.511, pp. 54-65, 2013.

[3] L. Jaffke, O. Kwon, T.J.F. Strømmea, J.A Tellea, “Mim-width III. Graph powers and generalized distance domination problems,” *Theoretical Computer Science*, vol.796, pp. 216-236, 2019.

[4] M. Vatshelle, “New Width Parameters of Graphs,” PhD thesis, University of Bergen, Norway, 2012.

#### 4. 研究成果

本研究では始めに,  $mim$  幅が小さいグラフにおける最大クリーク問題を扱った. 最大クリーク問題はグラフ理論分野において最も基礎的な問題の 1 つであり, かつ, 前述の LCVP の枠組みに当てはまらないため,  $mim$  幅に関する既存のアルゴリズムが適用できない問題である. そのため, 最大クリーク問題を考えることは, 本研究の目的を達成するための重要な足掛かりとなると考えた. その結果, 当初の予想に反して, 最大クリーク問題は  $mim$  幅が極めて小さなグラフ (具体的には  $mim$  幅が 2) ですら NP 困難であることを証明した. 最大クリーク問題は, 構造的パラメータを基にしたアルゴリズムの研究において効率的なアルゴリズムが構築しやすい問題と知られていた. したがって, この困難性の結果は構造的パラメータの分野における既存研究との強い対比となっている. さらに, この困難性を証明する際に得られた手法を拡張して, 特定の性質を持つ任意の問題は全て,  $mim$  幅が小さくとも NP 困難であることを明らかにした. 例えば, 最大誘導クラスター問題や最大誘導弦グラフ問題は上述の性質を持つことから, 即座に  $mim$  幅が小さいグラフですら問題が NP 困難であることが言える. すなわち, 多種多様な問題に対して,  $mim$  幅を基にしたアルゴリズムの理論的境界を示すことができた.

この困難性の成果により, LCVP の枠組みに当てはまらない問題に対しては,  $mim$  幅が 2 であるようなグラフですら, 統一的なアルゴリズムの構築は困難を極めると判明した. そこで次に本研究では, 構造的パラメータの汎用性を下げる代わりに, 最大クリーク問題を含む多様な問題を解く統一的なアルゴリズムの構築を目指した. 汎用性を下げると言っても, 任意の区間グラフ, 置換グラフ, 距離遺伝グラフなどは  $mim$  幅が 1 であることが知られており, 依然として高い汎用性を持つ. この方針の下で研究を行った結果, グラフの  $mim$  幅が 1 であれば, 統一的なアルゴリズムを構築可能であると示すことができた. この結果は, LCVP の枠組みに当てはまらない問題であっても, 最大クリーク問題, 最大誘導クラスター問題, 最大誘導弦グラフ問題などに関しては, 入力グラフの  $mim$  幅が 1 であれば効率的に解けることを意味する. つまり, グラフの  $mim$  幅が 1 であるか 2 であるかが, グラフ上の組合せ最適化問題の計算複雑性に大きな影響を与えることを示した. さらに, 本研究で得られた結果は, 「区間グラフ, 置換グラフ, 距離遺伝グラフに対する問題は解きやすい」というグラフアルゴリズム分野における経験則に対して, 「それらグラフの  $mim$  幅が 1 であるため」という理論的根拠を与えるものにもなっている.

本研究では  $mim$  幅以外にも様々なグラフの構造的パラメータを扱い, いくつかの組合せ最適化問題に対して効率的なアルゴリズムの構築や困難性の証明を与えた. 例えば, 最短経路やグラフ点彩色の遷移問題, 標的集合選択問題, グラフパッキング問題などが挙げられる. また, 区間グラフ上の最大幸福頂点集合問題を解く既存のアルゴリズムは, 計算時間が非常に大きいという課題があったが,  $mim$  幅の研究で得たアルゴリズム手法を利用することにより, 計算時間を大きく改善することができた.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Hiroshi Eto, Takehiro Ito, Eiji Miyano, Akira Suzuki, Yuma Tamura	4. 巻 85
2. 論文標題 Happy Set Problem on Subclasses of Co-comparability Graphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Algorithmica	6. 最初と最後の頁 3327 ~ 3347
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00453-022-01081-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yusuke Yanagisawa, Akira Suzuki, Yuma Tamura, Xiao Zhou	4. 巻 13973
2. 論文標題 Parameterized Complexity of Optimizing List Vertex-Coloring Through Reconfiguration	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the 17th International Conference and Workshops on Algorithms and Computation (WALCOM2023)	6. 最初と最後の頁 279 ~ 290
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-031-27051-2_24	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yanagisawa Yusuke, Suzuki Akira, Tamura Yuma, Zhou Xiao	4. 巻 8
2. 論文標題 Decremental Optimization of Vertex-colouring Under the Reconfiguration Framework	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 International Journal of Computer Mathematics: Computer Systems Theory	6. 最初と最後の頁 80 ~ 92
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/23799927.2023.2185543	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hiroshi Eto, Takehiro Ito, Eiji Miyano, Akira Suzuki, Yuma Tamura	4. 巻 13174
2. 論文標題 Happy Set Problem on Subclasses of Co-comparability Graphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Proceedings of the 16th International Conference and Workshops on Algorithms and Computation (WALCOM2022)	6. 最初と最後の頁 149 ~ 160
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-96731-4_13	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kota Kumakura, Akira Suzuki, Yuma Tamura, Xiao Zhou	4. 巻 14422
2. 論文標題 On the Routing Problems in Graphs with Ordered Forbidden Transitions	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the 29th International Computing and Combinatorics Conference (COCOON2023)	6. 最初と最後の頁 359 ~ 370
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-031-49190-0_26	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tatsuya Gima, Tesshu Hanaka, Yasuaki Kobayashi, Yota Otachi, Tomohito Shirai, Akira Suzuki, Yuma Tamura, Xiao Zhou	4. 巻 14549
2. 論文標題 On the Complexity of List $H$ -Packing for Sparse Graph Classes	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Proceedings of the 18th International Conference and Workshops on Algorithms and Computation (WALCOM 2024)	6. 最初と最後の頁 421 ~ 435
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-981-97-0566-5_30	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naoki Domon, Akira Suzuki, Yuma Tamura, Xiao Zhou	4. 巻 14549
2. 論文標題 The Shortest Path Reconfiguration Problem Based on Relaxation of Reconfiguration Rules	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Proceedings of the 18th International Conference and Workshops on Algorithms and Computation (WALCOM 2024)	6. 最初と最後の頁 227 ~ 241
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-981-97-0566-5_17	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takahiro Suzuki, Kei Kimura, Akira Suzuki, Yuma Tamura, Xiao Zhou	4. 巻 14637
2. 論文標題 Parameterized Complexity of Weighted Target Set Selection	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Proceedings of Theory and Applications of Models of Computation - 18th Annual Conference (TAMC 2024)	6. 最初と最後の頁 320 ~ 331
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-981-97-2340-9_27	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yota Otachi, Akira Suzuki, Yuma Tamura	4. 巻 -
2. 論文標題 Finding Induced Subgraphs from Graphs with Small Mim-Width	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Proceedings of the 19th Scandinavian Symposium on Algorithm Theory (SWAT 2024)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計14件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 Yuma Tamura
2. 発表標題 Algorithms for happy set problem on interval graphs and permutation graphs
3. 学会等名 情報処理学会 第186回アルゴリズム研究会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yuma Tamura
2. 発表標題 Happy set problem on subclasses of co-comparability graphs
3. 学会等名 The 16th International Conference and Workshops on Algorithms and Computation (WALCOM2022) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yuma Tamura
2. 発表標題 Parameterized complexity of optimizing list vertex-coloring through reconfiguration
3. 学会等名 The 17th International Conference and Workshops on Algorithms and Computation (WALCOM2023) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yuma Tamura
2. 発表標題 On the complexity of list $H$ -packing for sparse graph classes
3. 学会等名 The 18th International Conference and Workshops on Algorithms and Computation (WALCOM 2024) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Naoki Domon
2. 発表標題 The shortest path reconfiguration problem based on relaxation of reconfiguration rules
3. 学会等名 The 18th International Conference and Workshops on Algorithms and Computation (WALCOM 2024) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Takahiro Suzuki
2. 発表標題 Parameterized complexity of weighted target set selection
3. 学会等名 Theory and Applications of Models of Computation - 18th Annual Conference (TAMC 2024) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Yuma Tamura
2. 発表標題 Finding induced subgraphs from graphs with small mim-width
3. 学会等名 The 19th Scandinavian Symposium on Algorithm Theory (SWAT 2024) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Kota Kumakura
2. 発表標題 On the routing problems in graphs with ordered forbidden transitions
3. 学会等名 The 29th International Computing and Combinatorics Conference (COC00N2023) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yuma Tamura
2. 発表標題 List variants of packing problems on sparse graphs
3. 学会等名 情報処理学会 第196回アルゴリズム研究会
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Naoki Domon
2. 発表標題 Shortest path reconfiguration with relaxed constraints
3. 学会等名 情報処理学会 第196回アルゴリズム研究会
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 鈴木 隆央
2. 発表標題 点重み付きグラフにおける標的集合選択問題に関する研究
3. 学会等名 情報処理学会 第196回アルゴリズム研究会
4. 発表年 2024年



1. 発表者名 菅 達皓
2. 発表標題 遷移ルールの緩和に基づく独立集合遷移問題
3. 学会等名 電子情報通信学会総合大会 COMP-AFSA学生シンポジウム
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Takahiro Suzuki
2. 発表標題 Algorithms for weighted target set selection
3. 学会等名 電子情報通信学会総合大会 COMP-AFSA学生シンポジウム
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Kota Kumakura
2. 発表標題 On the problems of finding paths to avoid ordered forbidden transitions based on graph structure
3. 学会等名 情報処理学会 第195回アルゴリズム研究会
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------