様 式 C－19、F－19－1、Z－19 （共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　研究成果報告書

令和 6 年 5 月 28 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2021～2023
課題番号：２１Ｋ２１２８５

研究課題名（和文）偏微分作用素環上の数式処理を用いた非線形システムの推定・制御器設計理論

研究課題名（英文）Design theory for estimation and control of nonlinear systems by using symbolic computation for rings of differential operators

研究代表者
庵 智幸（Iori, Tomoyuki）

大阪大学・大学院情報科学研究科・助教

研究者番号：００９０８４１０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：非線形システム制御理論において非常に重要な偏微分方程式であるHamilton-Jacobi方程式（HJ方程式）が，特定の条件のもとで，有限個のパラメータ決定問題に帰着できることを示した．また，このパラメータ決定問題が高々有限個の代数方程式で表現可能であることを示した．さらに，HJ方程式の近似解法である逐次ガラーキン法を微分・差分作用素の数式処理で効率化し，複雑な非線形関数の積分で表されるパラメータを高速に求めるアルゴリズムを提案した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
非線形システム制御理論においてHamilton-Jacobi方程式（HJ方程式）は単なる安定化制御のみならず，非線形システムの最適制御，ロバスト制御などの基礎となる非常に重要な偏微分方程式である．本研究の成果は，解の存在条件などまだ未解明な部分は残るものの，このHJ方程式を代数方程式という非常に簡単に解けるクラスの問題にまで帰着させたという点で学術的に大きな意義がある．また，その計算が数式処理アルゴリズムとして実装できるという点も実用上非常に重要である．さらに，HJ方程式の既存の数値解法に数式処理を組み合わせることで計算の効率化が達成できた点についても，本研究のアプローチの有用性を示している．

研究成果の概要（英文）：We have shown that the Hamilton-Jacobi equation (HJ equation), an important partial differential equation in nonlinear systems and control theory, can be reduced to a problem of determining finite parameters under specific conditions. Additionally, we have shown that this parameter determination problem can be expressed as a finite set of algebraic equations. Furthermore, we have proposed an algorithm that efficiently performs the successive Galerkin method, an approximation method for the HJ equation, by utilizing symbolic computation of the differential and difference operators to efficiently compute integrals of complex nonlinear functions.

研究分野：制御理論

キーワード：非線形システム　Hamilton-Jacobi方程式　数式処理　代数的手法　偏微分方程式　D加群

様　式　C－１９、F－１９－１（共通）

１．研究開始当初の背景

実社会に存在するシステムの多くが非線形性を含んでいるのに対し，非線形システムの推定・制御理論の発展は依然として不十分である．非線形システム理論における理論的成果は，システムの挙動を表すベクトル場に沿って関数の変化率を特徴づける偏微分方程式で記述される．したがって，推定器や制御器の設計段階，あるいはそれらアルゴリズムの内部で偏微分方程式を解く必要が生じる．しかし，一般の偏微分方程式を解析的に解くことは非常に困難である．このため，従来ではある特定の点の周りの線形近似解やべき級数近似解が用いられてきた． これらの近似解を用いていては局所的な非線形性しか捉えられず，それを用いて設計される推定・制御器の有効性もまた局所的なものに限られてしまう．　大域的非線形性を考慮するためには，偏微分方程式の近似解を構成することなく，推定・制御に必要な計算を行う必要がある．これに対する一つの解決策として，方程式そのものを記号のまま計算する数式処理という技術が挙げられる．特に，偏微分作用素環上の数式処理を活用することで，解くべき偏微分方程式の非線形性を近似せずに考慮できると期待し，本課題を開始するにいたった．

２．研究の目的

本本研究では，偏微分作用素環上の D 加群に対する数式処理という新たな視点・方法論を導入することで，大域的に非線形性を考慮できる推定・制御器設計理論の構築を目指す．具体的には下記の個別目標を設定した．

(1) 偏微分作用素環上の数式処理を用いた逐次ベイズ推定
逐次ベイズ推定は動的システムの内部状態を観測出力から推定する基本的なアルゴリズムであるが，確率分布を対象とした計算が多く含まれるため，システムの線形性や外乱のガウス性などの仮定をおき，有限個のパラメータの計算に帰着しない限りは，解析的に解くことは不可能である．このため非線形システムに対する逐次ベイズ推定においては何らかの近似処理が必須となる．特に，周辺分布の計算や期待値計算に対応する積分計算の近似は，大域的な非線形性の考慮が必要となる点で計算コストと近似精度のトレードオフが取りにくい点である．本課題では，この計算コストと近似精度のトレードオフを数式処理を活用して改善することを目的とした．

(2) 偏微分作用素環上の数式処理を用いた Hamilton-Jacobi 方程式（HJ 方程式）の解析
HJ 方程式は非線形システムの安定化，最適制御，ロバスト制御，さらには平衡実現を求める際にも現れる基本的で重要な偏微分方程式であると同時に，その求解の難しさが非線形システム制御理論を実応用へと展開していく上での大きな課題であった．そこで，偏微分作用素環上の数式処理を用いて制御対象の非線形性を厳密に考慮しつつ，より解きやすい問題へ帰着する条件の解析・方法の探索を目的とした．

(3) 数式処理の活用による HJ 方程式の数値解法の効率化
一方で，HJ 方程式の重要性は古くから認識されており，これを解くための数値アルゴリズムも様々なものが提案されている．計算機上では有限次元の値を有限回計算することしかできないため，本質的に無限次元の対象である偏微分方程式を何らかの近似を用いて有限次元の問題へと帰着させる必要がある．この帰着を行う過程に数式処理を活用することで，制御対象の非線形性を大域的かつ厳密に考慮することを目的とした．

３．研究の方法

前項で述べた個別目的ごとに説明する．

(1) 偏微分作用素環上の数式処理を用いた逐次ベイズ推定
本課題では，確率分布の周辺化・期待値計算に伴う積分計算を数式処理によるオフライン計算を用いて効率化した．具体的には，被積分関数が満たすべき偏微分方程式系から，それを積分した関数が満たすべき偏微分方程式系を計算する積分アルゴリズムとよばれるアルゴリズムを応用し，評価したい積分値が満たすべき偏微分方程式をオフラインで計算した．そのため，実際に状態推定を行うオンライン計算では，この偏微分方程式を解く必要が生じる．ある種の偏微分方程式の解を効率的に評価するホロノミック勾配法と呼ばれる手法を応用して積分値の評価を行うことで，システムの非線形性を厳密に考慮した逐次ベイズ推定アルゴリズムの提案を試みた．

(2) 偏微分作用素環上の数式処理を用いた HJ 方程式の解析
HJ 方程式の解を定める第一積分と呼ばれる関数に着目し，それらが満たすべき偏微分方程式を

対象に数式処理による解析を行った．具体的には，時不変系の HJ 方程式を定義する Hamilton 関数が第一積分の一つとなることを基に，Hamilton 関数が満たすべき偏微分方程式から，偏微分作用素環上の数式処理において重要な計算対象であるパフ系と呼ばれる偏微分方程式系を導出した．このパフ系は，その解となる関数を有限個のパラメータで特徴づけることができるという性質をもっており，この性質を通して HJ 方程式の解を定める第一積分の有限個のパラメータによる特徴付けを試みた．

(3) 数式処理の活用による HJ 方程式の数値解法の効率化
HJ 方程式の数値解法は様々なものが提案されているが，代表的なものに逐次ガラーキン法がある．逐次ガラーキン法は，HJ 方程式の解を有限個の基底関数の線形和で近似し，その基底関数が張る空間へと射影した HJ 方程式の残差が 0 となるよう，係数を求める手法である．射影計算において，関数同士の内積計算に由来する複雑な非線形関数の積分計算を複数回行う必要があり，どのようにこれを効率的に実行するかが重要な課題となっていた．一方で，解を近似するために用いる基底関数は，主に何らかの直交多項式系が用いられる．これらの直交多項式系は差分方程式を満たすことが知られており，偏微分作用素環上の数式処理はメリン変換と呼ばれる微分差分作用素の変換を通じて差分方程式をも取り扱うことが可能である．そこで，基底関数が満たす差分方程式をもとに数式処理を適用し，積分計算の効率化を試みた．

４．研究成果

(1) 偏微分作用素環上の数式処理を用いた逐次ベイズ推定
積分アルゴリズムを用いることで，計算コストの大きい積分計算をオフラインで実行することにより，オンラインでの計算量を削減し，計算コストと推定精度のトレードオフの改善を達成した．また，評価すべき積分式の構造の類似性から，これらが単一の母関数の微分係数として計算できることを発見し，オンライン計算中で解くべき常微分方程式の数を削減した．本成果は，複雑な非線形システムの内部状態を，その非線形性を厳密に考慮しつつ観測データから推定する手法を与えており実用上重要である．

(2) 偏微分作用素環上の数式処理を用いた HJ 方程式の解析
本個別目標については，以下の成果が得られた．まず，Hamilton 関数が満たすべきパフ系を第一積分が満たすべき偏微分方程式と組み合わせることにより，ある有限個のパラメータが所望の第一積分に対応するための十分条件を導出した．また，この十分条件がパラメータに関する高々有限個の代数方程式で記述できることを証明した．したがって，この代数方程式が解を持てば，代数方程式を解いて求めたパラメータの値からパフ系を通じて第一積分を求め，HJ 方程式の解を見つけることができる．また，代数方程式へと帰着させるアルゴリズムは数式処理によって計算機に実装できることも確認した．解の存在条件など未解明の点もいくつか残るものの，特定のクラスの HJ 方程式を容易に求解が可能な代数方程式へと帰着させた点で学術的に意義深いものである．これらの成果によって，「システム制御情報学会　学会賞　奨励賞」および「計測自動制御学会　制御部門奨励賞（基礎分野）」を受賞した．

(3) 数式処理の活用による HJ 方程式の数値解法の効率化
メリン変換と偏微分作用素環上の数式処理によって，基底関数が満たす差分方程式および制御対象となるシステムの微分方程式から，求めるべき積分値が満たす差分方程式を導出するアルゴリズムの提案を行った．これにより，求めるべき積分値のうち，ごく一部を数値的に求めるだけで，残りの積分値は差分方程式への代入を繰り返すことで容易に計算できる．またこの提案手法は，その計算コストが逐次ガラーキン法で用いる基底関数の数に依存しないという特徴を持っており，高い近似精度を得るために多数の基底関数を用いる場合で有用である．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Iori Tomoyuki、Ohtsuka Toshiyuki	４．巻 -
２．論文標題 Nonlinear Bayesian filtering via holonomic gradient method with quasi moment generating function	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Asian Journal of Control	６．最初と最後の頁 1-16
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1002/asjc.2970	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　0件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 庵智幸
２．発表標題 最適制御によるホロノミック勾配法の積分経路設計
３．学会等名 第65回自動制御連合講演会
４．発表年 2022年

１．発表者名 庵智幸
２．発表標題 ホロノミックなハミルトン関数に対するハミルトン・ヤコビ方程式の一解法
３．学会等名 第9回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム
４．発表年 2022年

１．発表者名 庵智幸
２．発表標題 ホロノミックなハミルトン関数に対するハミルトン・ヤコビ方程式の解法に関する一検討
３．学会等名 第64回自動制御連合講演会
４．発表年 2021年

１．発表者名 Tomoyuki Iori and Toshiyuki Ohtsuka
２．発表標題 Bayesian filtering for nonlinear stochastic systems using holonomic gradient method with integral transform
３．学会等名 The 60th IEEE Conference on Decision and Control（国際学会）
４．発表年 2021年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関