

令和 6 年 6 月 6 日現在

機関番号：11301

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2021～2023

課題番号：21K21302

研究課題名（和文）フラクタル性のある複雑ネットワークの臨界的性質と構造的特徴の間の一般的関係解明

研究課題名（英文）Clarifying the General Relation Between Critical Properties and Structural Properties in Complex Networks with Fractality

研究代表者

藤木 結香 (Fujiki, Yuka)

東北大学・学際科学フロンティア研究所・助教

研究者番号：70912517

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,400,000 円

研究成果の概要（和文）：現実世界の複雑ネットワークにはしばしば強い次数ゆらぎ（スケールフリー性）と繰り込み変換下における不変性（フラクタル性）が現れる。本研究では両性質を有するスケールフリー・フラクタル・ネットワーク（SFN）の構造と臨界的性質の一般的関係は未だ明らかにするため、多様な構造的特徴を再現することができるSFNの一般的数理モデルを構築し、本モデルによって生成されるSFN上のパーコレーションの臨界点および臨界指数を求めた。さらにSFNに典型的な性質である負の長距離次数相関が一般のSFNにおいて果たす役割を解明するために、次隣接距離に次数相関を有するネットワークを生成しその臨界点を数値計算によって調べた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多様な構造的特徴を再現することができるSFNの一般的数理モデルを構築したことで、SFNの構造的性質に関する系統的な研究が可能となった。さらに、SFNに特徴的な性質である負の長距離次数相関が頑強性に与える影響を、臨界点およびコア構造に着目し評価した。これにより、負の次隣接次数相関はランダム破壊とターゲット破壊のどちらに対する頑強性においても大きな変化に寄与しないことが明らかになった。これらの結果から得られた知見は、SFNの起源と頑強性の関係について有益な情報を有しており、また、多様なネットワーク破壊に対して頑強なネットワークの設計への応用が期待できる。

研究成果の概要（英文）：In most complex networks in the real world, degrees widely fluctuate (scale-free property), and invariance under renormalization (fractality) often appears. In this study, to clarify the general relationship between the structure and critical properties of scale-free fractal networks (SFNs) that possess both properties, we constructed a general mathematical model of SFNs that can produce various structural features in real networks and determined the critical points and critical exponents of bond percolation on SFNs generated by this model. Furthermore, we generated networks with degree correlations at the next-nearest neighbor distance and numerically investigated their robustness to elucidate the role of negative long-range degree correlations, which are a typical property of SFNs, in general SFNs.

研究分野：ネットワーク科学

キーワード：複雑ネットワーク フラクタル 臨界現象

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

系の離散的な要素をノード、要素間の相互作用をエッジとするネットワークは、複雑系の最も簡便かつ一般的な抽象表現であり、航空網、人間関係、神経網などの極めて広い領域にわたる複雑系はネットワークとして表すことができる。現実世界の複雑ネットワークにはしばしば強い次数ゆらぎ(スケールフリー性)と繰り込み変換下における不変性(フラクタル性)が現れる[1,2]。しかし、両性質を有するスケールフリー・フラクタル・ネットワーク(SFN)の構造と臨界的性質の一般的関係は未だ明らかになっていない。

2. 研究の目的

本研究では、多様な構造的特徴を再現することができる SFN の一般的数理モデルを構築する。本モデルによって生成される SFN 上の物理現象を臨界点および臨界指数を求めることで特徴づける。これにより、SFN の臨界的性質と構造的特徴の間の一般的関係を明らかにする。

3. 研究の方法

(1) SFN の一般的数理モデルの構築

スケールフリー性の起源は、新たなノードの参入によってネットワークが成長するときに、次数の高いノードがより優先的に新たな隣接ノードを獲得する優先選択則にある。また、逆繰り込み変換を十分な回数繰り返したネットワークはフラクタル性を発現する可能性がある。このことから、SFN を生成する既存モデル[3, 4]の本質は、優先選択則と逆繰り込み変換の組み合わせにあると期待できる。既存モデルを一般化し、多様な構造を有する SFN を生成することができる決定論的数理モデルを構築する。

(2) SFN の構造的性質の評価

研究方法(1)で構築する一般的 SFN モデルは決定論的であるためその構造的性質を解析的に評価することができる。これらの結果をもとに、当モデルによって生成されるネットワークがスケールフリー性とフラクタル性を有するための形成条件を明らかにする。

(3) SFN 上のパーコレーションの臨界点、臨界指数の解析的評価

当モデルは決定論的であるため、研究方法(2)と同じくパーコレーション問題における臨界点および臨界指数を解析的に計算することができる。Rozenfeld らの方法[5]を拡張し、一般の形成条件における臨界点と静的臨界指数を解析的に計算する。

(4) SFN のクラスター性と臨界的性質の関係解明

ネットワークにおいて最も基本的な構造的性質のひとつであるクラスター性に着目し、研究方法(2)をもとにクラスター性のみが異なりその他の構造的性質は同一となる 2 つの SFN を生成し、研究方法(3)の結果をもとにその臨界的性質を調べることで、SFN のクラスター性と臨界的性質間の関係を明らかにする。

(5) SFN の次数相関と頑強性の関係解明

パーコレーション臨界点およびターゲット攻撃に対する臨界点は応用的な観点においてネットワークの故障に対する大域的連結性の保たれやすさ(頑強性)を評価する重要な指標である。SFN に典型的な性質である負の長距離次数相関[6, 7]が SFN の頑強性に対してどのような果たす役割を果たすか解明するため、次隣接距離に長距離次数相関を有するネットワークを生成しその頑強性を数値計算によって調べる。

4. 研究成果

(1) SFN の一般的数理モデルの構築

優先選択則と逆繰り込み変換を組み合わせたアルゴリズムによって図 1 のように SFN を生成する決定論的数理モデルを構築した。このモデルでは小規模なグラフ構造をモデルパラメータとし、多様な構造的特徴を有する SFN を生成することができる。一般的数理モデルを構築したことで、SFN の構造的性質に関する系統的な研究が可能となった。

(2) SFN の構造的性質の評価

研究成果(1)で構築した数理モデルによって一般の小規模ネットワーク G_{gen} を用いて生成されるネットワークの構造的性質としてノード数、エッジ数、次数分布、ネットワーク直径、フラクタル次元、隣接次数相関、クラスター係数を導出した。これらの結果をもとに当モデルにおける SFN の生成条件を明らかにするとともに、条件を満たす範囲で小規模ネットワーク G_{gen} のトポロジーを選ぶことによって多様な次数分布、フラクタル次元、隣接次数相関およびクラスター性を有する SFN を生成できることを確認した。

(3) SFN 上のパーコレーションの臨界点、 臨界指数の解析的評価

研究成果(1)で構築した数理モデルによって生成される SFN 上のボンド・パーコレーションにおける臨界点および臨界指数を解析的に計算した。これにより、モデルパラメータの変化にともなう決定論的 SFN の構造的性質の変化とパーコレーション特性の変化を数学的に結びつけることが可能となった。

(4) SFN のクラスター性と 臨界的性質の関係解明

研究成果(1)で構築した数理モデルを用いて、複雑ネットワークにおいて最も基本的な構造的特徴である隣接次数相関とクラスター性に着目し臨界的性質との関係を調べた。その結果、図2のような全く同じ隣接次数相関を有する SFN であっても、クラスター性が異なることによってパーコレーション臨界点および臨界指数が変化することが確認できた。以上の研究成果(1)-(4)を論文にまとめるとともに国内外の学会で発表した。

(5) SFN の次数相関と頑強性の関係解明

SFN に特徴的な性質である負の長距離次数相関がネットワークの頑強性へ与える影響をランダム故障における臨界点(パーコレーション臨界点)およびターゲット攻撃に対する臨界点に着目し評価した。これにより、次隣接ノード間における負の次数相関はランダム故障とターゲット破壊のどちらに対してもネットワークをわずかに脆弱にすることが明らかになった。本結果については論文を準備中である。負の次数相関に限らず、次隣接相関に関して得られた知見は SFN の起源と頑強性の関係について有益な情報を有しており、また、多様なネットワーク破壊に対して頑強なネットワークの設計への応用が期待できる。これについては現在も研究を続けている。

<引用文献>

- [1] A.-L. Barabási, R. Albert, Science 286, 809-512 (5439)
- [2] C. Song, S. Havlin, and H. A. Makse, Nature **433**, 392 (2005).
- [3] C. Song, S. Havlin, and H. A. Makse, Nat. Phys. **2**, 275 (2006).
- [4] H. D. Rozenfeld, S. Havlin, and D. Ben-Avraham, New J. Phys. **9**, 175 (2007).
- [5] H. D. Rozenfeld and D. ben-Avraham, Phys. Rev. E **75**, 061102 (2007).
- [6] Y. Fujiki, S. Mizutaka, and K. Yakubo, Eur. Phys. J. B **90**, 126 (2017).
- [7] Y. Fujiki and K. Yakubo, Phys. Rev. E **101**, 032308 (2020).

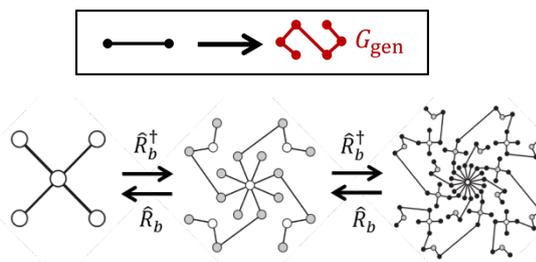


図1. 決定論的に生成される SFN モデルの例。左が初期状態 G_0 であり、エッジを小規模ネットワーク G_{gen} へ置き換える逆線り込み変換 \hat{R}_b^{\dagger} によって成長する。

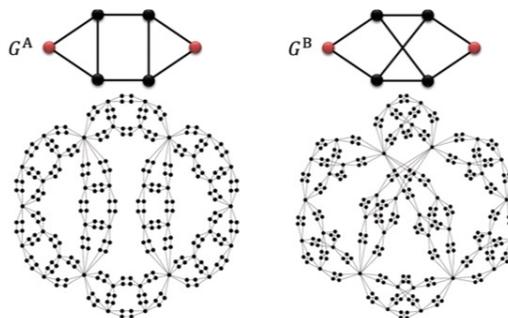


図2. 小規模ネットワーク G_{gen} として G^A を採用して生成される SFN (左) と G^B を採用して生成される SFN (右)。両者は全くおなじ隣接次数相関を有するがクラスター係数が異なる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Kousuke Yakubo, Yuka Fujiki	4. 巻 17
2. 論文標題 A general model of hierarchical fractal scale-free networks	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 PLOS ONE	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1371/journal.pone.0264589	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 1件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 藤木結香
2. 発表標題 フラクタル・スケールフリー・ネットワーク：決定論的モデルの一般化とその構造的特徴
3. 学会等名 ネットワーク科学研究会2022（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 藤木結香, Stefan Junk
2. 発表標題 Robustness of networks with degree-degree correlation between second nearest neighbors
3. 学会等名 ネットワーク科学研究会2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 水高将吾, 藤木結香
2. 発表標題 2部グラフ構造に基づくネットワークの相関構造
3. 学会等名 日本物理学会秋季大会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 藤木結香, 水高将吾
2. 発表標題 ネットワークの連結成分の構造的性質: クリークサイズ揺らぎによる影響
3. 学会等名 日本物理学会秋季大会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 藤木結香, 水高将吾
2. 発表標題 二部グラフの連結成分にあらわれる構造相関: 母関数法による解析
3. 学会等名 若手数学者交流会(第4回)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 藤木 結香
2. 発表標題 MEMB法によるネットワークの反復的繰り込み
3. 学会等名 ネットワーク科学セミナー2021
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 藤木結香, Stefan Junk
2. 発表標題 ネットワーク距離 $l=2$ までの長距離次数相関を有するネットワークの頑強性
3. 学会等名 日本物理学会第78回年次大会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yuka Fujiki, Kousuke Yakubo
2. 発表標題 Structural properties of fractal scale-free networks formed by a general hierarchical model
3. 学会等名 28th International Conference on Statistical Physics
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------