

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 24 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(S)

研究期間：2010～2014

課題番号：22224001

研究課題名(和文) 格子、保型形式とモジュライ空間の総合的研究

研究課題名(英文) Lattices, automorphic forms, and moduli spaces

研究代表者

金銅 誠之 (Kondo, Shigeyuki)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：50186847

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 58,600,000円

研究成果の概要(和文)：いくつかの方程式の共通零点の集まりとして定まる図形(代数多様体)の構造や対称性および図形のある種の分類(モジュライ空間)を行うことが代数幾何の大きな問題である。楕円曲線の2次元版としてK3曲面と呼ばれる代数多様体が19世紀に発見され、現在、数学および数理物理でも興味を持たれている。本研究において、K3曲面のモジュライ空間の構造の解明や、K3曲面の対称性を表す自己同型群の記述などの成果を得た。またK3曲面の対称性とマシュー群と呼ばれる有限単純群との間の不思議な関係を示唆するマシュームーンシャイン現象と呼ばれるものに関心を集めているが、この方面での研究においても成果をあげた。

研究成果の概要(英文)：The main problem of algebraic geometry is to study structures and symmetries of algebraic varieties and their moduli spaces. A K3 surface is a 2-dimensional analogue of an elliptic curve, which was found in the 19th century. Now K3 surfaces are interesting to Mathematics and theoretical Physics. In this research project we have obtained several results of the structure of moduli spaces of K3 surfaces and automorphisms of K3 surfaces. On the other hand, there is a mysterious connection, called Mathieu moonshine, between symmetries of K3 surfaces and the Mathieu group, a sporadic finite simple group. We have some results concerning this phenomenon.

研究分野：数学，代数学，代数幾何学

キーワード：格子 保型形式 モジュライ K3 曲面 エンリケス曲面 マシュームーンシャイン 自己同型

1. 研究開始当初の背景

1970年代にK3曲面の周期理論が確立され、そのモジュライ空間がIV型有界対称領域の算術商で記述されることが分かった。その後、ミラー対称性など数理論理学からの刺激も受けながら盛んに研究されてきた。さらにK3曲面の自己同型群と散在型有限単純群マッシュー群の関係やリーチ格子との関係、Borcherds によるIV型有界対称領域上の保型形式論を用いたモジュライ空間の研究など、代数幾何学にとどまらず分野を超えた研究の広がりが見えてきた。

2. 研究の目的

楕円曲線論をひな形に、格子理論や保型形式論等を用い、K3 曲面、その高次元版であるカラビ・ヤウ多様体やそれらのモジュライ空間の幾何学的研究を進めることが、第一の目的である。一方で、K3 曲面の自己同型群や幾何とマッシュー群やリーチ格子との関係、ムーニャイン予想と呼ばれる K3 曲面とマッシュー群の間の新たに発見された不思議な現象などを研究することが、第二の目的である。

3. 研究の方法

専門分野にとどまらず分野横断的なセミナーや国際研究集会を組織・開催し、その中で議論を重ね新たな視点や問題意識を得ながら研究を進めた。

4. 研究成果

(1)モジュライ空間と保型形式の研究

様々な代数多様体のモジュライ空間が IV 型有界対称領域やその部分領域である複素超球の算術商として実現されることを、研究代表者らが得ていた。研究代表者は、この状況に Borcherds による保型形式論を適用することで古典的な代数幾何学的結果が保型形式の観点から再構成できることを示した。具体的には Coble による平面 4 次曲線のモジュライ空間の射影モデルの保型形式を用いた構成、3 次曲面のモジュライ、射影直線の順序つき 6 点のモジュライである井草 4 次超曲面やセグレ 3 次超曲面への適用があげられる。この方法は 2-初等、3-初等 K3 曲面のモジュライにも適用できるものである。

モジュライ空間の有理性の判定は困難な問題の一つである。研究代表者は Dolgachev との共同研究で Coble 曲面のモジュライ空間の有理性を示した。また K3 曲面とその対合の組からなる 2-初等的 K3 曲面のモジュライ空間は 75 種類の族からなるが、研究分担者の馬は 2 つの族を除いてそれらが有理的であることを証明した。Dolgachev・金銅の結果と馬の結果はそれぞれ補完し合うものである。さらに馬は符号が $(2, n)$ の 2 次形式に付随した IV 型有界対称領域の算術商の双有理構造を調べ、2 次形式の判別 2 次形式が巡回群の場合に有限個の例外を除けば算術商

は一般型となることを示した。連携研究者の向井は次数 30 の偏極 K3 曲面のモジュライの単有理性を示した。複素幾何学的側面からは、連携研究者の吉川謙一が 2-初等的 K3 曲面のモジュライ空間の同変解析的ねじれ率を Borcherds の保型形式の言葉で決定した。

(2)有限群と自己同型群の研究

研究代表者と連携研究者の島田は、有限単純群に現れるリーチ格子の理論を用いて、標数 3 の代数閉体上定義された超特異 K3 曲面で最も特殊なアルチン不変量が 1 の曲面の自己同型群の生成元を見いだした。また任意標数の超特異 K3 曲面のネロン・セヴェリ格子のある種の双対性を見いだした。この双対性は一般の超特異 K3 曲面の幾何学が特殊な K3 曲面のそれから導きだされることを意味し応用が広いと考える。また連携研究者の小木曾は複素力学系の観点から研究し、標数 0 に持ち上げできない自己同型をもつ超特異 K3 曲面の存在を示した。

標数 2 のエンリケス曲面は 3 種類の位数 2 の群スキームに対応して 3 種類に分類されることが 1970 年代に Bombieri-Mumford によって示されたが、その後あまり進展がなかった。研究代表者は桂氏との共同研究でエンリケス曲面の族の具体的な構成と自己同型群の記述を与えることに成功した。これは標数 2 の有限自己同型群を持つエンリケス曲面の分類への端緒を与えるものであると考えられる。

K3 曲面に自己同型として作用する有限群と散在型有限単純の一つである次数 24 のマッシュー群 M_{24} との関係が向井の結果として知られている。本研究で向井は、K3 曲面の固定点を持たない対合による商として現れるエンリケス曲面と M_{24} の部分群である次数 12 のマッシュー群 M_{12} との関係を解明した。

特殊線形群 $SL(2, C)$ の有限部分群に関するマッカーイ対応は有名であるが、この高次元化は大きな問題である。研究分担者の伊藤由佳理は $SL(3, C)$ の非可換有限部分群に対して新たな成果を得た。

(3)カラビ・ヤウ多様体の研究

小木曾は、カラビ・ヤウ多様体の双有理変換群について双有理幾何学の立場と複素力学系の立場から研究し、特に正のエントロピーを持つ原始的正則自己同型を許容する 3 次元カラビ・ヤウ多様体や有理多様体の存在を初めて示した。またエンリケス曲面の高次元版であるエンリケス多様体の一般論も得た。また吉川は保型形式論の手法を用いて Borcea-Voisson 型カラビ・ヤウ多様体の BCOV 不変量を決定した。(元)分担者の長尾は、3 次元カラビ・ヤウ多様体上の接続層の不変量として現れる Donaldson-Thomas 不変量の一般化である精密化非可換 Donaldson-Thomas

不変量の壁越え現象に関する成果を得た。

(4) 数理論理など他分野との関係

江口・大栗・立川により、K3曲面の楕円種数を $N=4$ 超共形代数の指標で展開すると展開係数がマシュー群 M_{24} の既約表現の次数の和で表される事が見いだされていた。この現象はJ関数に関する有名なモンスター・ムーンシャイン(monstrous moonshine)に似ているので、マシュー・ムーンシャインと呼ばれている。研究分担者の江口は、マシュー・ムーンシャインを半分にしたエンリケス曲面に関係したマシュー群 M_{12} のムーンシャインを新たに見いだした。さらに mock theta 関数の研究を行い Zwegers が与えた公式をコンパクトな表式に書き直すことに成功した。

研究分担者の菅野浩明は、4次元 $N=2$ (超共形)ゲージ理論におけるインスタントンの数え上げから定義される母関数と2次元共形場理論の共形ブロックの対応関係 (AGT 関係式) の研究を行った。ATG関係式から分配関数が適当な共形場理論のカイラル代数の Verma 加群の適当な元 (Whittakerベクトル) の内積で与えられることが期待される。面作用素とよばれる余次元 2 の欠陥を入れたゲージ理論の分配関数に対し、そのような Whittaker ベクトルの特徴付けを提唱した。

分担者の伊山は導来圏で基本的な傾加群を補完する対象 (準傾対象、 τ 傾加群) を導入して、その変異理論を確立した。

連携研究者の宮本は頂点作用素代数や共形場理論の古典的な問題であった軌道予想 (有限タイプの頂点作用素代数の有限自己同型による軌道模型も有限タイプとなる) を解決した。これにより可解自己同型群に対する軌道予想も解決した。この結果は応用され、多くの新しい頂点作用素代数が軌道構成によって作成されている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 113 件)

- 1) S.Kondo, The Igusa quartic and Borcherds products, in the proceedings of K3 surfaces and their moduli, ed. by Faber, Farkas, van der Geer (掲載決定) 査読有り.
- 2) I.Shimada, An algorithm to compute automorphism groups of K3 surfaces and an application to singular K3 surfaces, IMRN 2015 (掲載決定). Doi: 10.1093/imrn/rnv006. 査読有り.
- 3) H. Esnault, K. Oguiso, Non-liftability of automorphism groups of a K3 surface in positive characteristic, Math. Ann., published online, March 2015, (DOI: 10.1007/s00208-015-1197-9), 査読有り.
- 4) S.Ma, Rationality of the moduli spaces of 2-elementary K3 surfaces, Journal of Algebraic Geometry 24(2015), 81-158, doi:10.1090/S1056-3911-2014-00622-6. 査読有り.
- 5) S.Mukai, H.Ohashi, The automorphism groups of Enriques surfaces covered by symmetric quartic surfaces, Recent Advances in Algebraic Geometry, Cambridge Univ. Press 2015, 307-320. 査読有り.
- 6) M.Miyamoto, C_2 -cofiniteness of cyclic-orbifold models, Comm. Math. Phys. 335(2015), 1279-1286. 査読有り.
- 7) S.Kondo, I.Shimada, On a certain duality of Neron-Severi lattices of supersingular K3 surfaces, Algebraic Geometry, vol.1(2014), no.3, 311-333, doi:10.14231/AG-2014-016. 査読有り.
- 8) S.Kondo, I.Shimada, The automorphism group of a supersingular K3 surface with Artin invariant 1 in characteristic 3, IMRN 2014(2014), 1885-1924, doi:10.1093/imrn/rns274, 査読有り.
- 9) T.Eguchi, Y.Sugawara, Compact formulas for the completed Mock modular forms, JHEP 11(2014) 156, doi: 10.1007/JHEP11(2014)156. 査読有り.
- 10) O.Iyama, I. Reiten, Introduction to tau-tilting theory, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 111 (2014), 9704-9711, doi:10.1073/pnas.1313075111, 査読有り.
- 11) I.Shimada, Projective models of the supersingular K3 surfaces with Artin invariant 1 in characteristic 5, J. Algebra 403(2014), 1885-1924, doi: 10.1016/j.jalgebra.2013.12.029. 査読有り.
- 12) K.Oguiso, Automorphism groups of Calabi-Yau manifolds of Picard number two, Journal of Algebraic Geometry 23 (2014) 775--795. 査読有り.
- 13) I.Dolgachev, S.Kondo, The rationality of the moduli spaces of Coble and of nodal Enriques surfaces, Izv. Math. 77 (2013), 77-92, doi:10.4213/im7959, 査読有り.
- 14) T.Eguchi, K.Hikami, Enriques Moonshine, J. Phys. A46(2013), 312001, doi:10.1088/1751-8113/46/31/312001. 査読有り.
- 15) A.Ishii, Y.Ito, A.Nolla de Celis, On G/N -Hilb of N -Hilb, Kyoto J. Math., 53(2013), 91-130 (査読有り). doi: 10.1215/21562261-1966080.
- 16) S.Ma, Rationality of fields of invariants for some representations of $SL(2) \times SL(2)$, Comp.Math. 149(2013), 1225-1234, doi:

- 10.1112/S0010437X13007069. 査読有り .
- 17) S.Ma, The rationality of the moduli spaces of trigonal curves of odd genus, *J.reine angew.Math.* , 683(2013), 181-187, doi: 10.1515/crelle-2012-0003. 査読有り .
 - 18) K.Nagao, Donaldson-Thomas theory and cluster algebras, *Duke Math.J.* 162(2013), 1313-1367. 査読有り .
 - 19) S.Mukai, H.Ohashi, Enriques surfaces of Hutchinson-Gopel type and Mathieu automorphisms, *Arithmetic and Geometry of K3 surfaces and Calabi-Yau threefolds*, *Fields Inst. Comm.* 67(2013), 429-454, doi:10.1007/978-1-4614-6403-7_15. 査読有り .
 - 20) K.Yoshikawa, K3 surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space II, *J. reine angew.Math.* 677(2013), 15-70. 査読有り . Doi 10.1515/crelle.2012.009.
 - 21) S.Kondo, The moduli space of Hessian quartic surfaces and automorphic forms, *J. Pure Appl. Algebra* 216 (2012), 2233-2240, doi: 10.1016/j.jpaa.2012.02.001, 査読有り .
 - 22) T.Eguchi, K.Hikami, N=2 moonshine, *Phys. Lett. B* 717(2012), 266-273, doi:10.1016/j.physletb.2012.09.037. 査読有り .
 - 23) T.Eguchi, K.Hikami, Twisted elliptic genus and Borcherds product, *Lett. Math. Phys.* 102(2012), 203-222. Doi: 10.1007/s110555-012-0569-2. 査読有り .
 - 24) H.Kanno, M.Taki, Generalized Whittaker states for instanton counting with fundamental hypermultiplets, *J.High Energy Physics* 1205(2012), 052, doi: 10.1007/JHEP05(2012)052. 査読有り .
 - 25) K.Nagao, Derived categories of small toric Calabi-Yau 3-folds and counting invariants, *The Quarterly J. Math.* 63(2012), 965-1007. 査読有り .
 - 26) K.Yoshikawa, K3 surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space III, *Mat.Z.* 272(2012), 175-190. 査読有り . Doi 10.1007/s00209-011-0928-1.
 - 27) S. Kondo, The moduli of plane quartics, Goepel invariant and Borcherds products, 2011(2011), 2825-2860, doi: 10.1093/imrn/rnq190, 査読有.
 - 28) K.Oguiso, S.Schroerer, Enriques manifolds, *J. Reine Angew. Math.* 661(2011) 215--235. 査読有り .
- moonshine, Moduli space, conformal field theory and matrix model, OIST (国頭郡、沖縄県), 2015年3月16日~18日 .
- 2) M.Miyamoto, Vertex Operator Algebra and Simultaneous Inversion, *Perspectives in Lie Theory*, Pisa(Italy), 2015年1月12日 .
 - 3) S.Kondo, Enriques surfaces in characteristic 2 covered by the supersingular K3 surfaces with Artin invariant 1, K3, Enriques surfaces and related topics, 名古屋大学(名古屋市), 2014年11月10日 .
 - 4) Y.Ito, Open problems on quivers and resolutions of singularities, Workshop "Mckay correspondence, orbifolds, quivers, Warwick(UK), 2014年9月18日 .
 - 5) K.Oguiso, Some aspects of explicit birational geometry inspired by complex dynamics, ICM (Seoul 2014), Invited 45 minutes talk at Section 4 Algebraic and Complex Geometry, August 13 - 21, 2014, Seoul(Korea).
 - 6) S. Kondo, Igusa quartic and Borcherds products, Seoul ICM 2014 Satellite Conference on Algebraic and Complex Geometry, Daejeon(Korea), 2014年8月7日 .
 - 7) S.Kondo, A certain duality of Neron-Severi lattices of supersingular K3 surfaces, K3 surfaces and their moduli, Schiermonnikoog (Nederlands), 2014年5月5日 .
 - 8) I.Shimada, On the supersingular K3 surfaces with Artin invariant 1 in characteristic 5, K3 surfaces and their moduli, Schiermonnikoog (Nederlands), 2014年5月7日 .
 - 9) S.Ma, Finiteness of orthogonal modular varieties of non-general type, Moduli spaces of irreducible symplectic varieties, cubics and K3 surfaces, Lille(France), 2014年3月27日 .
 - 10) K.Yoshikawa, Equivariant analytic torsion for K3 surfaces with involution, Moduli spaces of irreducible symplectic varieties, cubics and K3 surfaces, Lille(France), 2014年3月26日 .
 - 11) S.Kondo, Certain duality of Neron-Severi lattices of supersingular K3 surfaces, Classification of Algebraic Varieties and related topics, Cetraro(Italy), 2013年9月9日 .
 - 12) K.Oguiso, Explicit examples of
- [学会発表](計 267 件)
- 1) T.Eguchi, K3 surfaces and Mathieu

- rational and Calabi-Yau threefolds with primitive automorphisms of positive entropy, Classification of Algebraic Varieties and related topics, 8-15 September 2013, Cetraro (Italy).
- 13) Y.Ito, Crepant resolution via quiver representation and G-Hilbert schemes, European Women in Mathematics 16th General Meeting, Bonn(Germany), 2013年9月3日.
- 14) T.Eguchi, Mathieu moonshine and superconformal algebra, Mock Modular Forms, Moonshine and Strings Theory, Simons Center for Geometry and Physics, New York (USA). 2013年8月26日~9月6日.
- 15) S.Mukai, Enriques surfaces with 720 symmetries, Lazarsfeld 教授還暦記念代数幾何学研究集会, Michigan 大学 (USA), 2013年5月18日.
- 16) S.Kondo, The rationality of the moduli spaces of Coble and of nodal Enriques surfaces, New trends in arithmetic and geometry of algebraic surfaces, CIRM, Marseille (France), 2013年3月15日.
- 17) S.Ma, Rationality of the moduli spaces of Eisenstein K3 surfaces, Algebraic Geometry, modular forms and applications to physics, ICMS, Edinburgh (UK), 2012年11月30日.
- 18) H.Kanno, Generalized Whittaker states for instanton counting and the confluence of the punctures, 5th Workshop on Geometric methods in Theoretical Physics, SISSA, Trieste (Italy), 2012年7月6日.
- 19) O.Iyama, tau-tilting theory, Cluster categories and cluster tilting, ノルウェー理工科大学(ノルウェー), 2012年3月28日.
- 20) S.Kondo, The moduli spaces of hessian quartic surfaces, Enriques surfaces, and automorphic forms, Automorphic forms and moduli spaces, CIRM, Marseille(France), 2011年10月10日.

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kondo/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

金銅 誠之 (Kondo, Shigeyuki)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号：50186847

(2) 研究分担者

江口 徹 (Eguchi, Toru)

立教大学・理学研究科・教授

研究者番号：20151970

(3) 研究分担者

伊藤 由佳理 (Ito, Yukari)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：70285089

(4) 研究分担者

伊山 修 (Iyama, Osamu)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号：70347532

(5) 研究分担者

馬 昭平 (Ma, Shohei)

東京工業大学・理学研究科・准教授

研究者番号：80633255

(6) 研究分担者

菅野 浩明 (Kanno, Hiroaki)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号：90211870

(7) 研究分担者

長尾 健太郎 (Nagao, Kentaro)

(元) 名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・助教 (平成 25 年分担者削除)

研究者番号：10585574

(8) 連携研究者

向井 茂 (Mukai, Shigeru)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：80115641

(9) 連携研究者

島田 伊知朗 (Shimada, Ichiro)

広島大学・理学研究科・教授

研究者番号：10235616

(10) 連携研究者

小木曾 啓示 (Ogiso, Keiji)

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：40224133

(11) 連携研究者

吉川 謙一 (Yoshikawa, Kenichi)

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：20242810

(12) 連携研究者

宮本 雅彦 (Miyamoto, Masahiko)

筑波大学・理学研究科・教授

研究者番号：30125356