

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 3 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(A)

研究期間：2010～2014

課題番号：22244004

研究課題名(和文) 3次元多様体論の深化

研究課題名(英文) Deepening three-manifold theory

研究代表者

小島 定吉 (Kojima, Sadayoshi)

東京工業大学・情報理工学(系)研究科・教授

研究者番号：90117705

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 30,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、幾何構造、位相不変量、計算の三つの概念をリンクさせ、閉曲面のトポロジーにおいて種数が果たす役割をモデルに、3次元多様体のトポロジーの研究を深化させ、10年後の3次元多様体論の標準的教科書に登場するような項目について基本的な成果を得ることを目指した。そして5年間にわたる研究により、幾何構造および幾何学的群論の側面、1, 2次元の対象を経る不変量の側面および計算トポロジーの側面でいくつかの基本的成果を得た。そのなかで、曲面の自己同型のエントロピーとその写像トーラスの単体体積の比較研究は、本研究の特徴的な成果としてあげることができる。

研究成果の概要(英文)：Based on the role of genus in surface topology, we planned to develop the 3-manifold topology by bridging three concepts, geometric structures, topological invariants and computing, and to obtain fundamental results on several topics which are supposed to appear in the standard textbooks of 3-manifold theory in 10 years. We then have obtained in the last 5 years a few fundamental results on the geometric structures and geometric group theory, on the invariants coming from 1 or 2 dimensional objects and on computational topology. Among them, the comparison study for entropy of surface automorphisms and simplicial volume of their mapping tori could be featured.

研究分野：幾何学・トポロジー

キーワード：3次元トポロジー 幾何構造 位相不変量 計算機支援 体積 2次特性類 力学系 葉層構造

## 1. 研究開始当初の背景

3次元トポロジーの研究は19世紀末のPoincareに遡る。1904年に提唱された「3次元閉多様体は単連結であれば3次元球面にトポロジーが等しい」と主張するポアンカレ予想は、20世紀のトポロジー研究の進展を力強く牽引したことはよく知られている。それが1982年にThurstonにより幾何化予想として昇華され、Perelmanにより解決されたのは2003年である。ところが、幾何化予想の解決は計量の制御を主とした局所的な議論の帰結であり、3次元多様体の大域トポロジーの理解には必ずしも満足には答えていない。曲面のトポロジーが種数で分類されるという事実に対応する命題が、3次元では欠けているのである。

このため幾何化予想解決以降、トポロジストはより3次元トポロジーの深い理解を求める方向へ研究を進めた。こうした状況下で研究代表者がとくに注目したのが、「幾何構造」と各種の「位相不変量」、およびそれらの具体的な「計算」によるアプローチであった。

## 2. 研究の目的

Perelmanによる幾何化予想の解決と、多種多様な不変量の出現、そして不変量計算アルゴリズムの開発により、本研究開始時には3次元多様体論は新たな局面に入っていた。それゆえ本研究の立案時には、3次元多様体について適当な見通しを設定することが必要であった。そこで本研究は、「幾何構造」「位相不変量」「計算」の三つのキーワードをリンクさせ、閉曲面(2次元多様体)のトポロジーにおいて種数が果たす役割をモデルに、3次元多様体のトポロジーの研究を深化させ、10年後の3次元多様体論の標準的教科書に登場するような項目を精査抽出し、各項目について基本的な成果を得、さらなる理論展開の基盤を築くことを目指した。

大きく設定した本研究の目的は終了する現時点で十分に達成されたとは言えないが、現在も多くの3次元多様体論再構成の試行研究が進行中であり、その中で我々の方向性は一定の評価を得ている。

## 3. 研究の方法

3次元多様体論の深化を目指すという大きな目標に対し、研究開始の時点で方向性を一つに定めるのはたいへん難しかった。そこで、専門性が極めて近い近隣研究分担者および連携研究者計9名の協力を得てスタートした。そして研究の質を維持するため研究組織を適宜更新させながら、幾つかの課題を同時進行させることとした。

課題を大きく括ると三つで、  
幾何構造(とくに双曲構造)、幾何学的群論の側面  
3次元多様体の中の1,2次元の対象を経由する不変量の側面  
計算トポロジーの側面

である。これらの分類の下で、各種のより具体的な取組み課題を設定した。

本研究は理論研究のため具体的目標を時系列に設定することは難しく、たとえば実際、当初具体的目標に含めていたヴァーチャルファイバー予想は思いもかけず2012年にAgo1により解決されるという事情が生じ、その後の課題にAgo1のアイデアの精査を含めるなど、逐次体制を見直しながら研究を進めた。

一方、研究分担者および連携研究者同士の学術的情報共有と相互啓発を意識して研究連絡を極力日常的に行うように努めた。また、研究組織外からの情報収集のため、関連研究者を短期間招へいしての集中的討論を逐次実施した。さらに、研究成果の公開および情報収集のため研究会への参加、関連研究会の開催を主催あるいは共催により支援した。その数は5年間で13件あり、これらのイベントには国際性を十分取り込んだ。一例を記すと、最終年度の夏に東京大学大学院数理科学研究科で開催した国際研究会「Hyperbolic Geometry and Geometric Group Theory」には、研究代表者が計画の段階から深く関わり、本科研費からは相当額を支援した。参加者数は195名、うち71名が国外からの参加であり、その多くが自らサポートを得て来日したことは印象的であった。

## 4. 研究成果

本研究は「3次元多様体論の深化」という大きな目標を掲げており、目標達成には正直言って道半ばであるが、課題にそった成果を幾つか挙げるができる。ここでは研究代表者が直接関わる研究、およびそれとは独立した複数年度参画いただいた研究分担者の研究の一部を記したい。

研究代表者および研究分担者の金英子と高澤光彦は、曲面の自己同相写像のエントロピーとその写像トーラスの単体体積の関係について一連の研究を進め、研究期間中に数本の論文を完成させた。本研究に先行して我々は、曲面のトポロジーを固定し、さらに自己同相写像が擬Anosov型るとき、エントロピーと体積の比が下から正の定数で抑えられることを示していた。この場合曲面束は双曲構造を持ち単体体積は定数倍を除いて双曲体積と一致する。本研究期間中に研究代表者は、擬Anosovとは限らない一般の自己同相写像に対して同様の事実が成立することを証明した。さらにこの評価の改良を試み、McShane氏と共同で擬Anosov型に対しては、オイラー数をかけることにより正規化されたエントロピーと写像トーラスの双曲体積の比が、曲面のトポロジーとは独立な正定数で下から抑えられることを示し、プレプリントとしてarXivにアップロードし、現在学術誌に投稿中である。その証明に粗(coarse)幾何のアイデアが必要であり、新しい3次元多様体論においては幾何学的群論のアイデ

アを絡めることが重要であることを確認した。

また、金・高澤との共同研究では3鎖絡み目の補空間であるマジック多様体の Dehn 手術で生じる双曲構造を持つ曲面束について、計算機実験に基づく組織的な数値不変量の振る舞いの研究を進め、とくにファイバーのトポロジーを固定した時のエントロピーの予想される最小値に関する多くの知見を得た。これはまさに、「幾何構造」「位相不変量」「計算」の三つのキーワードを絡めた本課題らしい研究といえる。さらにこの研究で McMullen による Teichmüller 多項式が組織的計算に大変有効であったことを念頭に、現在、よりワイルドだが基本的と思われる5鎖絡み目の補空間に対する同趣旨の研究を進めている。

一方、研究分担者である藤原耕二は本研究期間中に幾何学的群論分野でたいへん質の高い研究業績を挙げた。とくに Bestvina と Bromberg との共同研究は、多くの幾何学的に興味深い群の擬木と呼ぶ新しい幾何学的対象への作用を与え、各種の面白い幾何学的帰結を統一的に導いた。そのひとつとして、写像類群の漸近次元が有限であることが示されている。この論文は学界できわめて高い評価を受けている。

他方、研究分担者である逆井卓也は、本研究期間中に写像類群等の代数的構造に関する研究分野で多くの示唆に富む研究業績を挙げた。とくに森田茂之・鈴木正明との共同研究による一連の研究は特筆に価する。その中の一つであるが、11 元生成の自由群の外部自己同型群の整 Euler 標数の計算は、研究対象が大変豊かであること目の当たりに記す結果であり、専門家には色々な意味で衝撃をもって受け止められている。ちなみにこの計算は東工大のスーパーコンピュータ TSUBAME に依っており、本研究が掲げたキーワードの中の「位相不変量」と「計算」を絡めた一つの大きな成果である。

この他、研究分担者上正明による4次元多様体の詳細な研究、石川剛郎による特異点の優れた研究、河澄響矢による写像類群の秀逸な研究があるが、ここではその成果を省略する。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

##### [雑誌論文](計 29 件)

S. Moirta, T. Sakasai and M. Suzuki, Integral Euler characteristic of  $Out F_{11}$ , *Experimental Math.*, 査読有, 24 (2015), 93-97.

M. Bestvina, K. Bromberg and K. Fujiwara, Constructing group actions on quasi-tree and applications to mapping class groups, *Publ. IHES*, 査

読有, Published online (2014).

N. Kawazumi and Y. Kuno, The logarithms of Dehn twists, *Quantum Topology*, 査読有, 5 (2014), 347-423.

E. Kin, S. Kojima and M. Takasawa, Minimal dilatation of pseudo-Anosovs generated by the Magic 3-manifold and their asymptotic behavior, *Algeb. Geom. Topol.*, 査読有, 13 (2013), 3537-3602.

E. Kin and M. Takasawa, Pseudo-Anosovs on closed surfaces having small entropy and Whitehead sister link exterior, *J. Math. Soc. Japan*, 65 (2013), 411-446.

S. Kojima, Entropy, Weil-Petersson translation distance and Gromov norm for surface automorphisms, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 査読有, 140 (2012), 3993-4002.

##### [学会発表](計 71 件)

S. Kojima, The moduli space of pentagons, NII Shonan meeting "Knot Theory; Algorithm, Complexity and Computation", 招待講演, 湘南国際村センター (2014) (神奈川)。

K. Fujiwara, Quasi-homomorphisms into non-commutative groups, Conference on Geometry on Groups and Spaces, 招待講演, KAIST, Deajeon, Korea (2014)。

T. Sakasai, Structure of symplectic derivation Lie algebra of a free Lie algebra, Conference on Mapping Class Groups of Surfaces and Automorphism Groups of Free Groups, 招待講演, U. of Strasbourg, France (2014)。

S. Kojima, Normalized entropy versus volume for pseudo-Anosovs, Conference on Analysis and Geometry of Riemann Surfaces and Related Topics, 招待講演, 東京工業大学 (2013) (東京)。

小島定吉, トポロジーと基本群, 玉城嘉十郎教授記念公開学術講演会, 招待講演, 京都大学 (2013) (京都)。

E. Kin, The asymptotic behavior of the minimal growth rates of pseudo-Anosovs and the fibered face of the magic 3-manifold, Mini Workshop on Growth, 招待講演, 大阪市立大学 (2012) (大阪)。

##### [図書](計 1 件)

小島定吉, 離散構造, 朝倉書店 (2013)

##### [産業財産権]

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

##### [その他]

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

小島 定吉 (KOJIMA, Sadayoshi)  
東京工業大学・大学院情報理工学研究科・教授  
研究者番号：90117705

### (2) 研究分担者

吉田 朋好 (YOSHIDA, Tomoyoshi)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：60055324  
平成22年度

金 英子 (KIN, Eiko)  
東京工業大学・大学院情報理工学研究科・准教授  
研究者番号：80378554  
平成22年度～平成24年度

高澤 光彦 (TAKASAWA, Mitsuhiro)  
東京工業大学・大学院情報理工学研究科・助教  
研究者番号：80323822  
平成22～26年度

逆井 卓也 (SAKASAI, Takuya)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・助教  
(平成24年3月まで)  
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授  
(平成24年4月より)  
研究者番号：60451902  
平成22・23年度と平成25・26年度

藤原 耕二 (FUJIWARA, Koji)  
東北大学・大学院情報科学研究科・教授  
(平成24年3月まで)  
京都大学・大学院理学研究科・教授  
(平成24年4月より)  
研究者番号：60229078  
平成22～26年度

上 正明 (UE, Masaaki)  
京都大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：80134443  
平成23年度

石川 剛郎 (ISHIKAWA, Goo)  
北海道大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：50176161  
平成24年度

河澄 響矢 (KAWASUMI, Nariya)  
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授  
研究者番号：30214646  
平成26年度