

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 20 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(A) (一般)

研究期間：2010～2014

課題番号：22244005

研究課題名(和文) クライン群とタイヒミュラー空間の大域幾何的研究

研究課題名(英文) Global geometric studies on Kleinian groups and Teichmuller spaces

研究代表者

大鹿 健一 (Ohshika, Ken'ichi)

大阪大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：70183225

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 28,500,000円

研究成果の概要(和文)：まずKlein群について、Thurstonが1980年代に提示した問題群を中心にして基本的な理論の構成の仕事をを行った。その中で、Thurstonの未解決問題のうち2つを完全に解決することができた。そこで得た結果をもとに、Klein群の変形空間の器樂的研究を行った。変形空間の境界の位相構造について新しい知見をえるとともに、指標多様体の中での変形空間の力学系的性質の研究を進め、原始安定性の必要十分条件を得ることに成功した。Klein群の成果をTeichmuller空間の研究に応用し、様々なコンパクト化の共通の地盤としての、簡約化されたコンパクト化の研究を進めた。

研究成果の概要(英文)：We first worked on constructing fundamental theory of Kleinian groups, which centred around 10 problems raised by Thurston in 1980's. In that process, we succeeded in resolving two among these problems completely. Based upon this work, we studied deformation spaces of Kleinian groups from geometric viewpoint. We could get new insights into the topology of the boundaries of deformation spaces, and at the same time, succeeded in getting a necessary and sufficient condition on the primitive stability, studying dynamical properties of deformation spaces embedded in character varieties. Applying what we got in the theory of Kleinian groups to the Teichmuller theory, we studied reduced compactification of Teichmuller spaces, which should serve as a common ground for various compactifications of Teichmuller spaces.

研究分野：位相幾何学

キーワード：Klein群 Teichmuller空間 コンパクト化 変形空間

## 1. 研究開始当初の背景

1960-70年代の Ahlfors と Bers の仕事により、Klein 群とその変形空間が Teichmüller 空間の自然な一般化として考えられた。さらに Bers 埋め込みに見られるように、Klein 群の世界でとらえ直すことにより、Teichmüller 空間に対する理解もより深まることが示唆された。その後 1980 年代の Thurston の研究により、3次元双曲多様体の研究と結びつくことによって、まったく新たな境地が開かれ、3次元多様体、双曲幾何を用いた手法による研究が行われるようになった。

特に Thurston が 1982 年に出版した論文では、3次元多様体と Klein 群に関する 24 の未解決問題が提示され、そのうち 10 個は Klein 群に関するものであった。これがその後の Klein 群の研究の方向を決定づける大きな要素となった。

## 2. 研究の目的

本研究では、Thurston の問題意識の枠組みに沿っての Klein 群の研究を進めると共に、Klein 群の変形空間の理論を整備し、それを通じて Teichmüller 空間への理解を深めることを目的とする。

より具体的には次のような問題に取り組む。まず Thurston があげた 10 の問題のうち、研究開始時点で未解決であった次の 2 つの問題を解決する。(1) 2重極限定理の Schottky 群への一般化。(2) Accidental parabolic 元が生じるような、擬 Fuchs 群の極限の幾何学的解析。これらを解決することを通じて、Klein 群の変形空間の境界の位相構造を解明する。

さらに Klein 群の変形空間の研究での成果を応用して、Teichmüller 空間の様々なコンパクト化の比較、特に Bers コンパクト化が他のコンパクト化とどのように関連しているかを調べる。この研究により、Teichmüller 計量に関する理解が飛躍的に深まることが期待できる。

## 3. 研究の方法

本研究は基本的に大阪大学における研究活動を中心としておこなう、個人研究、共同研究と、代表者、分担者の海外出張を通じて行う海外の研究協力者との共同研究を組和競ることによって推進する。

海外での共同研究は、大鹿が主にヨーロッパと韓国、中国において、宮地がヨーロッパ、アメリカ、中国において行う。

和田は計算機による研究支援を担当する。

## 4. 研究成果

Klein 群の Thurston の問題に関わる研究では、次の 2 つの顕著な結果を得た。まず大鹿が、Toulouse 大学の Cyril Lecuire、KIAS の Kim In Kang( )との共同で、Thurston

の 10 の問題の 1 つである、2重収束定理を Schottky 空間の場合に拡張する問題を完全に解決した。(論文[1]) さらに大鹿は相馬と共同で、擬 Fuchs 群の幾何的極限を完全に分類することにより、accidental parabolic が生じる場合の擬 Fuchs 群の幾何的解析を完成させた。(論文は投稿中)

これらの成果を元に大鹿は変形空間と指標空間についてのいくつかの結果を得た。まず変形空間については境界における bumping の現象を幾何的極限の解析を使うことにより、分析した(論文は投稿中)。指標空間についての研究としては、まず Kim In Kang, Jeon Woojin( )Cyril Lecuire と共同で、Schottky 空間の境界にある primitive stable な表現を完全に決定した(10)。これは Minsky の提出した問題に対する解答を与えている。次にこの結果を応用して、再び Lecuire, Kim と共同で、Schottky 空間の全ての点は、primitive stable でかつ閉多様体に対応する表現の極限となることを示した。(9)

Teichmüller 空間論についても、Klein 群での成果を元にいくつかの結果を得た。Teichmüller 空間には相異なるコンパクト化があり、それらの関係を調べることは重要な問題である。大鹿は Athanase Papadopoulos との連作論文(19)にて、measured foliation space で、横断測度を忘れることにより、商空間をとって得られる unmeasured foliation space の自己同相群は(一般化された)写像類群と一致することを示した。Teichmüller 空間の Teichmüller ray compactification には写像類群が作用しないことが Kerckhoff によって知られているが、我々の結果はこの compactification に横断測度を忘れる reduction を施せば、写像類群が作用ししかも剛性を持つことを導く。同様の結果が Bers compactification についても得られた。(11) さらに宮地は Gardiner-Masur compactification がもつ双曲空間との類似の構造の存在を示した。これらにより様々な compactification の共通の地盤があることが期待される。

本研究の集大成として、2014 年夏に、東京大学で、MSJ-SI “Hyperbolic geometry and geometric group theory” を大鹿が代表となり、東工大の小島定吉氏、京大の藤原耕二氏と共同で組織した。世界中からこの分野の専門家が集まり、大変質の高い研究集会となった。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 33 件)

[1] C. Lecuire, I. Kim and K. Ohshika, Convergence of freely decomposable Kleinian groups, *Inventiones Mathematicae*,

204 , 83--131 (2016)

- [2] K. Ohshika and M. Sakuma, Subgroups of mapping class groups related to Heegaard splittings and bridge decompositions, *Geometriae Dedicata* 180 (2016), 117–134
- [3] K. Ohshika, Geometric limits of Kleinian groups and their applications, *Handbook of Group Actions, International Press vol 2*, (2015) 245-270
- [4] L. Li, K. Ohshika and X. Wang, On Klein-Maskit Combination Theorem in space II, *Kodai J. Math.* 38 (2015), 1-22
- [5] H. Miyachi, A criterion for holomorphic families of Riemann surfaces to be virtually isomorphic, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 91, 10 151-154, (2015).
- [6] H. Miyachi, A rigidity theorem for holomorphic disks in Teichmüller spaces *Proc. Amer. Math. Soc.* 143, 2949–2957, (2015).
- [7] H. Miyachi K. Ohshika and S. Yamada, Weil-Petersson Funk metric on Teichmüller space, *Handbook of Hilbert geometry*, (2014), EMS, 339--352,
- [8] K. Ohshika, Compactifications of Teichmüller spaces, *Handbook of Teichmüller theory vol IV*, IRMA, EMS, 235—254, (2014)
- [9] I. Kim and C. Lecuire and K. Ohshika, Primitive stable closed hyperbolic 3-manifolds. *Topology Appl.* 172 68--71, (2014)
- [10] W. Jeon, I. Kim, K. Ohshika and C. Lecuire, Primitive stable representations of free Kleinian groups, *Israel J. Math.* 199 no. 2, 841--866, (2014)
- [11] K. Ohshika, Reduced Bers boundaries of Teichmüller spaces, *Ann. Inst. Fourier*, 64 145--176, (2014)
- [12] H. Miyachi, Spirals and the asymptotic Teichmüller space, *Special volume dedicated to Fred Gehring" in Computational Methods and Function Theory Volume 14-2* 609-622, (2014)
- [13] H. Miyachi, Unification of the extremal length geometry on Teichmüller space via intersection number, *Math. Zeit.* 278 , 1065-1095, (2014)
- [14] H. Miyachi, Extremal length boundary of Teichmüller space contains non-Busemann points, *Trans. Amer. Math. Soc.* 366, 5409–5430, (2014).
- [15] H. Miyachi, Extremal length geometry, *Handbook of Teichmüller theory IV* 197-234, (2014)
- [16] H. Miyachi, Lipschitz algebra and compactifications of Teichmüller space, *Handbook of Teichmüller theory IV*, 375–413 (2014)
- [17] H. Miyachi and T. Nogi, On

- extendibility of a map induced by the Bers isomorphism. *Proc. Amer. Math. Soc.* 142 (2014), no. 12, 4181-4189
- [18] N. Kawazumi, Y. Kuno and K. Toda, Generators of the homological Goldman Lie algebra, *Osaka J. Math.* 51 665–671 , (2014)
- [19] N. Kawazumi and Y. Kuno, The logarithms of Dehn twists, *Quantum Topology* 5 347–423 , (2014)
- [20] K. Ohshika, A note on the rigidity of unmeasured lamination spaces, *Proc. AMS*, 141 (2013), no. 12, 4385--4389
- [21] H. Miyachi, A differential formula for Extremal length, In the tradition of Ahlfors-Bers, VI, *Contemporary math* 590 (2013), 137–152
- [22] D. McCullough and T. Soma, The Smale conjecture for Seifert fibered spaces with hyperbolic base orbifold, *J. Differential Geom.* 93 (2013) 327-353.
- [23] S. Kiriki and T. Soma, Existence of generic cubic homoclinic tangencies for Henon maps, *Ergodic Theory Dynam. Sys.* 33 (2013) 1029-1051
- [24] R. Mineyama and H. Miyachi, A characterization of biholomorphic automorphisms of Teichmüller space. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 154 (2013), no. 1, 71-83
- [25] H. Miyachi, Teichmüller rays and the Gardiner-Masur boundary of Teichmüller space II. *Geom. Dedicata* 162 (2013), 283-304
- [26] H. Miyachi and D. Saric, Uniform weak\* topology and earthquakes in the hyperbolic plane. *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) 105 (2012), no. 6, 1123-1148.
- [27] T. Soma, Recent topics on topological Kleinian group theory , *Sugaku Expositions* 25 (2012), no. 1, 65-88
- [28] K. Ohshika, Realising end invariants by limits of minimally parabolic, geometrically finite groups. *Geom. Topol.* 15 (2011), no. 2, 827-890
- [29] T. Soma, Geometric limits and length bounds on curves. *Tokyo J. Math.* 34 (2011), no. 1, 203-219
- [30] H. Miyachi and H. Shiga, Holonomies and the slope inequality of Lefschetz fibrations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 139 (2011), no. 4, 1299-1307.
- [31] H. Endo, T.E. Mark and J. Van Horn-Morris, Monodromy substitutions and rational blowdowns. *J. Topol.* 4 (2011), no. 1, 227-253
- [32] K. Ohshika and H. Miyachi, Uniform models for the closure of the Riley slice. In the tradition of Ahlfors-Bers. V, 249-306, *Contemp. Math.*, 510, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010

[33] H. Endo, Hisaaki and Y. Z. Gurtas, Lantern relations and rational blowdowns. Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), no. 3, 1131-1142.

〔学会発表〕(計 44 件)

[1] K. Ohshika, Deformation spaces of Kleinian groups, Topology and Groups, (2 talks) University of Goa, 17-18 Oct 2015

[2] K. Ohshika, Teichmüller space; its asymptotic geometry, compactifications, and combinatorial models, (3 talks), Finsler geometry and applications to low-dimensional geometry and topology and moduli spaces, University of Cagliari, Italy, 21-24 Sept 2015

[3] K. Ohshika, Various compactifications of Teichmüller spaces and their relations (3 talks), Geometric structures and related topics, , 25,26 Aug 2015, KIAS, YangYang, Korea

[4] K. Ohshika, Accumulation of closed 3-manifolds within character varieties. Geometric Topology Fair in Korea A workshop on geometric group theory & low-dimensional topology, 10 Aug 2015, Gyeongju, K-Hotel, Korea

[5] K. Ohshika, The origin of the notion of manifold, Conference "Geometry in History" Université de Strasbourg, France, 11 June 2015

[6] K. Ohshika, Geography of closed 3-manifolds within character varieties, French-Japanese workshop on Teichmüller spaces and surface mapping class groups, IRMA Université de Strasbourg, France, 5 June 2015

[7] H. Miyachi, Towards the complex geometry of Teichmüller space with extremal length

Workshop on Teichmüller Theory and Low-Dimensional Topology at TSIMF 2016.1.11, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum, China

[8] H. Miyachi, Toward the complex geometry of Teichmüller distance Topology and Groups, 17 Oct 2015 Department of Mathematics, Goa University, India

[9] H. Miyachi, Toward the complex geometry of Teichmüller space from extremal length geometry - The Levi form of extremal length functions, French-Japanese workshop on Teichmüller spaces and surface mapping class groups IRMA Université de Strasbourg, France, 4 June 2015,

[10] K. Ohshika, Hyperbolic 3-manifolds and the Schottky space viewed as lying in the character variety, Group Action Forum,

Tsinghua-Sanya Mathematical Forum, Sanya, China 2014. 12. 16

[11] 大鹿健一, Asymptotic geometry of Heegaard splittings, 2014 年 11 月 30 日, 研究集会「多様体のトポロジーの展望」, 東京大学大学院数理科学研究科

[12] 大鹿健一, Klein 群の幾何とその応用, 日本数学会総合講演, 広島大学, 2014. 9. 26

[13] K. Ohshika, The work of Thurston on Kleinian groups, (4 talks) 12, 14, 15/05/2014 Master Class : Around Thurston-Grothendieck-Teichmüller theories, IRMA, Université de Strasbourg, France

[14] H. Miyachi, Geometry of the Gromov product in Teichmüller theory, Group Action Forum, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum, Mathematical Science Center, Tsinghua University, China, 2014.12.18

[15] H. Miyachi, Finsler geometry on Teichmüller metric The 49-th Symposium on Finsler Geometry, Nagasaki-ken KoutuSangyouKaikan 3F, Nagasaki, Japan, 2014. 12.5

[16] H. Miyachi, Extremal length geometry on Teichmüller space and its application, The Ahlfors-Bers Colloquium VI, Yale University, USA, 2014.10.23

[17] 宮地秀樹 タイヒミュラー空間への正則写像の剛性とその応用 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」東京大学大学院数理科学研究科 2014.8.22

[18] H. Miyachi, Rigidity of Holomorphic disks in Teichmüller space Hyperbolic geometry session, Iberoamerican Congress 2014 The Graduate Center, CUNY, USA, 2014.5. 22

[19] H. Miyachi, Rough homotheties on metric spaces, Master class on Finsler geometry and application, Galatasaray university, Istanbul, Turkey, 2014. 4. 10

[19] 河澄響矢, Turaev cobracket について, 2014 年 12 月 14 日, 研究集会「無限離散群と量子トポロジー」, 科学省共済組合箱根宿泊所.

[20] 河澄響矢, Goldman-Turaev Lie 双代数のテンソル表示について, 2014 年 11 月 28 日, 研究集会「多様体のトポロジーの展望」, 東京大学大学院数理科学研究科.

[21] N. Kawazumi, The Turaev cobracket, the Enomoto-Satoh traces and the divergence cocycle in the Kashiwara-Vergne problem, 2014 年 9 月 10 日, Special day 「Mapping class groups of surfaces and automorphism groups of free groups」, IRMA, University of Strasbourg, France

[22] K. Ohshika, Subgroups of mapping

class groups associated to Heegaard splittings and their actions on projective lamination spaces, New Trends in Teichmüller Theory and Mapping Class Groups, MFO Oberwolfach, Germany, 10/02/2014

[23] K. Ohshika, Geometric completion for deformation spaces of Kleinian groups, Japanese Turkish Joint Geometry Meeting, Galatasaray University, Istanbul, Turkey, 23/11/2013

[24] K. Ohshika, Geometric limits and deformation spaces of Kleinian groups, KAIST GT Fair, Jeonju, Korea, 15/8/13

[25] K. Ohshika, Geometric completion for quasi-Fuchsian spaces, AMC 2013 Pusan, Korea 4/7/13

[26] K. Ohshika, Geometric completion for deformation spaces of Kleinian groups, Analysis and Geometry of Riemann Surfaces and Related Topics, 東京工業大学, 22/6/13

[27] H. Miyachi, Geometry on Teichmüller space via extremal length, The XXIIth Rolf Nevanlinna Colloquium, 2013.8.6, University of Helsinki, Finland

[28] H. Miyachi, Geometry of Teichmüller distance, Analysis and Geometry of Riemann Surfaces and Related Topics, 東京工業大学, 21/6/13

[29] H. Miyachi, Geometry on Extremal length in Teichmüller theory, AMS Sectional meeting : Special Session on Analysis, Iowa State University, USA, 2013.4.28

[30] K. Ohshika, Deformation spaces of Kleinian groups, (4 talks) Teichmüller theory Geometry Master Class, Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics, Vienna, Austria, 25/3-28/3/13

[31] K. Ohshika, Subgroups of mapping class groups generated by Dehn twists around meridians on splitting surfaces, Aspects of representation theory in low-dimensional topology and 3-dimensional invariants, Carry-le-Rouet, France, 8/11/12

[32] 大鹿健一, クライン群の変形空間の位相構造, 日本数学会秋季総合分科会, 幾何学賞特別講演, 九州大学, 2012.9.19

[33] K. Ohshika, Actions of isomorphism groups of Heegaard splittings on projective lamination spaces, KAIST GT Fair, KAIST Daejeon, Korea, 13/8/12

[34] K. Ohshika, Two kinds of reduced boundaries of Teichmüller spaces and their symmetries, Group Actions in Geometry, Topology and Analysis in Kunming University of Science and Technology, China, 24/7/12

[35] H. Miyachi, Extremal length geometry of Teichmüller space, Progress in Low-dimensional topology : Teichmüller theory and 3-manifold groups, Centre for quantum geometry of moduli spaces, faculty of science Aarhus university Denmark, 2012. 8.11

[36] 大鹿健一, Primitive stability for free Kleinian groups, 離散群と双曲幾何の解析と幾何, 京都大学数理解析研究所, 2011. 12. 12

[36] K. Ohshika, Reduced Bers boundaries and their symmetries, KIAS Workshop on Hyperbolic geometry, bounded cohomology and symmetric spaces and related topics, KIAS, Seoul, Korea, 8/9/11

[37] 遠藤久顕, Lefschetz ファイバー空間の構成と改変について, トポロジーシンポジウム, 筑波大学, 2011.8.9

[38] 大鹿健一, Characterising bumping points in deformation spaces of Kleinian groups, リーマン面・不連続群論研究集会, 大阪国際交流センター, 2011-01-08

[39] K. Ohshika, Various ways of compactifying Teichmüller spaces and end invariants of Kleinian groups, MFO, Oberwolfach, Germany, 29/11/10

[40] K. Ohshika, Local topology of the boundaries of quasi-Fuchsian spaces, Hyperbolic Geometry and related topics, KIAS, Seoul, Korea, 16/9/10

[41] T. Soma, The Smal conjecture for Seifert fibered mspaces with hyperbolic base orbifold, ICM Satellite Conference, NUS Singapore, 2010.8.11

[42] 宮地秀樹, タイヒミュラー空間の Gardiner-Masur 境界と特異平坦構造の退化, リーマン面に関連する位相幾何学, 東京大学 2010-09-04

[43] 遠藤久顕, 写像類群の関係式による 4 次元多様体の改変について, リーマン面に関連する位相幾何学, 東京大学 2010-09-05

[44] 和田昌昭, Twisted Alexander polynomial revisited, RIMS Seminar : Twisted topological invariants and topology of low-dimensional manifolds, あきた白神体験センター, 2010-09-15

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :

国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

大鹿健一 (Ken'ichi Ohshika)  
大阪大学大学院理学研究科教授  
研究者番号：70183225

##### (2) 研究分担者

宮地秀樹 (Hideki Miyachi)  
大阪大学大学院理学研究科准教授  
研究者番号：40385480

相馬輝彦 (Teruhiko Soma)  
首都大学東京大学院理工学研究科教授  
研究者番号：50154688

和田昌昭 (Masaaki Wada)  
大阪大学大学院情報科学研究科教授  
研究者番号：80192821

遠藤久顕 (Hisaaki Endo)  
東京工業大学大学院理工学研究科教授  
研究者番号：20323777

河澄響矢 (Nariya Kawazumi)  
東京大学大学院数理科学研究科准教授  
研究者番号：30214646

##### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：