

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 8 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(A)

研究期間：2010～2014

課題番号：22244008

研究課題名(和文)複素解析幾何学の新展開

研究課題名(英文)New development of geometric complex analysis

研究代表者

平地 健吾(Hirachi, Kengo)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：60218790

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 36,000,000円

研究成果の概要(和文)：4回の多変数関数論葉山シンポジウムを開催した。複素解析幾何の運営組織の世代交代を目標とし、世話人代表は順に吉川謙一、伊師英之、山ノ井克俊、本多宣博と神本文が担当した。今後10年の運営組織が整ったと言える。後半では連携研究者に奥間智弘、松村慎一を加え、2度の特異点の幾何に関する国際研究集会および函数論サマーセミナーを開催した。また研究テーマを絞ったワークショップを3度(放物型幾何学、ベルグマン核、解析幾何学)を行い国際交流の活性化を図った。研究期間内に山ノ井克俊および本多宣博が日本数学会幾何学賞、大沢健夫がアメリカ数学会ベルグマン賞、平地健吾がICMの招待講演者になったことは特筆に値する。

研究成果の概要(英文)：We held four Hayama symposium on SCV. To make a change of generations of management group of geometric complex analysis in Japan, we ask young researchers to be the organizers. The chairs of the 4 meetings were K.-I. Yoshikawa, H. Ishi, K. Yamanoi, N. Honda and J. Kamimoto; they will lead the research group for next 10 years. In the second half of the project, T. Okuma and S. Matsumura join as co-Investigators and organized two international workshops on singularities in complex spaces and a summer seminar on complex analysis for young researchers. We have also organized 3 international workshops on specific topics: Parabolic geometry, the Bergman kernel, Geometric analysis. It is worth noting that the investigators of this project won several awards: K. Yamanoi and N. Honda won Geometry Prize of MSI, T. Ohsawa won The Bergman prize of AMS, K. Hirachi was selected to an invited speaker of ICM 2014.

研究分野：解析幾何学

キーワード：CR多様体 アインシュタイン計量 ケーラー多様体 ベルグマン核 乗数層イデアル 値分布論 放物型幾何 特異点

1. 研究開始当初の背景

今世紀に入ってからの複素解析幾何学の他分野への影響は著しい。そのハイライトとして

- (1) 極小モデル理論への大沢-竹腰の L^2 拡張定理および乗数層イデアルの応用
- (2) 幾何学的不変式論における安定性へのベルグマン核の漸近展開の応用
- (3) 超弦理論における AdS/CFT 対応へのアンビエント空間の理論の応用

などをあげることができる。これらの研究では日本の多変数関数論の研究グループによる大きな貢献があった。

2. 研究の目的

これまで内在的に研究されていた複素解析の解析的手法の応用が盛んに行われるようになってきている。本研究ではこれらの新しい要請に応える基礎理論の充実と、各分野で提起されている問題の解決(アバダンス予想, ベルグマン核の漸近挙動の記述, 不変微分作用素の不変量の構成など)を目指す。また複素解析の若手研究者により著しい進展がえられている多変数ネウマンリンナ論, 等質有界領域のベルグマン核の研究にも重点をおく。この研究の期間ではこれまで組織をリードしてきた研究者が定年を迎える; 多変数関数論の研究・運営組織のスムーズな世代交代も大きな課題である。

3. 研究の方法

研究代表者は全期間をとおりて全体の統括を行い, 各連携研究者は, 相互の関連を保ちつつ, 主に次のテーマを分担する:

- (1) L^2 拡張定理と乗数層イデアルの理論
- (2) 極小モデル理論への解析的手法の応用
- (3) ベルグマン核の漸近挙動の解析と幾何学的不変式論の安定性への応用
- (4) 値分布論を用いた小林擬距離の研究
- (5) 放物型幾何としての微分方程式系の研究
- (6) CR構造および共形構造に付随するアインシュタイン計量の研究
- (7) 放物型幾何での不変微分作用素の構成とこれらの作用素の幾何的な不変量の研究
- (8) 等質有界領域の多変数関数論および表現論の視点からの研究

研究テーマの相互理解を助ける大規模な研究集会として, 多変数関数論葉山シンポジウムおよび多変数関数論セミナーを毎年開催する。運営組織の世代交代のため各研究集会は60歳前後と40歳前後の研究者で共同主催し, その企画と運営をとおりて実務を引き継ぐ。

4. 研究成果

(1) 研究集会

初年度は研究集会「複素幾何学の諸問題」を開催し未解決問題を難易度付きで解説した。次年度から4回が多変数関数論葉山シンポジウムを開催した。主催者となった若手の連携研究者の研究に関連した海外からの講演者を中心に15~20コマの講演を行った。またテーマを絞った国際研究集会として「放物型幾何ワークショップ」, 「特異点と多様体の幾何学」, 「ベルグマン核ワークショップ」, 「幾何解析ワークショップ」を行った。国内の研究者の情報交換の場として多変数関数論冬セミナーを毎年開催した。

(2) 各テーマの研究成果

平地健吾はCR幾何学を放物型幾何学の一つとしてとらえ共形幾何に類似する現象を研究した。共形幾何では全Q曲率という大域的不变量の変分がFefferman-Grahamテンソルであるという基本的な公式が知られている。その類似としてCR幾何で全Q-prime曲率とよばれる大域的不变量を定義し, その変分がGraham不变量であることを示した。さらにCR多様体が領域の境界となっているときには, 領域の完備アインシュタイン・ケーラー計量の繰り込み体積が全Q-prime曲率と一致することを示した(松本佳彦氏, 丸亀泰二氏との共同)。2014年の国際数学者会議の招待講演ではこれらの成果について発表した。

満淵俊樹は偏極代数多様体の安定性と端的ケーラー計量の存在の同値性を主張するDonaldson-Tian-Yau予想の解決のためのプログラムを提出しその研究を進めた。まずDonaldsonによるテスト配置の概念を一般化して固定成分付きテスト配置というものを考えた。この一般化されたテスト配置のモジュライ空間のコンパクト化が存在問題に関連する応用をいくつかもたらすことを示した。次にDonaldson-二木不变量をテスト配位のコンパクト化にまで拡張した。この拡張による強い意味のK-安定性が, 不安定現象をより鮮明に反影し, 一般偏極に対する定スカラー曲率

ケーラー計量や端的ケーラー計量の存在問題に自然に応用できることを示した。

辻元はS. Boucksom氏と共同で標準束が擬正の代数多様体上のケーラー・リッチ流の研究を進めた。まずケーラー・リッチ流の大局的なカレント解が存在することを証明した。次に、射影代数多様体上では、初期値がアンブル直線束の第一チャーン類のケーラー形式の場合、擬正錐の中での極小特異閉正カレント解が一意的に存在することを示した。さらにそれが、射影族の上で半正值性を保つことをベルグマン核の変動を用いて示した。また代数多様体上のベルグマン測度の極限の一般化である、極值的測度の極限が、ケーラー・アインシュタイン計量または、標準測度に収束することを示した。その応用として特に3次元のコンパクトケーラー多様体のケーラー変形において多重種数が不変になることを示した。

山口佳三は2次のオーダーの接触幾何の研究を進めた。1階の共変系を許容する2階1未知関数偏微分方程式系に対する第2簡約定理を確立し、その応用として接触同値問題が放物型幾何に還元されるような2階偏微分方程式系のクラスの例をいくつか提示した。

大沢健夫はレビ平坦曲面と L^2 拡張定理の研究を進めた。ホップ曲面内の実解析的レビ平坦面の分類を完成させた。要約すると「有理型関数がなければレビ平坦面もない」ということが分かった。BlockiとGuan-Zhouが示した最良 L^2 拡張定理の証明を、穴あき円板のポアンカレ計量に適した L^2 評価を用いることによって大幅に単純化した。大沢は L^2 拡張定理に関する一連の研究により2014年度ベルグマン賞(アメリカ数学会)を受賞した。

本多宣博はツイスター空間の研究を継続し次の定理を得た:4つの複素射影平面の連結和上の代数的なツイスター空間の構造定理;無限遠で局所的に平坦なスカラー平坦ケーラー計量の新しい例の存在証明;基本系がペンシルであるようなツイスター空間の代数次元は2になり得ないこと。本多は自己双対多様体のツイスター空間の研究業績により2010年度日本数学会幾何学賞を受賞した。

野口潤次郎は値分布論の研究を継続するとともに、多変数関数論の入門レベルを超えた教科書を執筆した。値分布論では山ノ井の一致の定理を準アーベル多様体に拡張し更に数論的な一致の定理を得た(P. Corvaja氏と共

同)。整曲線の第2主要定理と退化問題(Green-Griffiths予想)について幾何学的不変量の観点からは現在のところ最も一般的な結果を示した(山ノ井克俊・G. Winkelmann氏と共同)。

山ノ井克俊は値分布論の研究を進めGol'dberg予想を解決した。複素平面上の超越的な有理型関数に関して、その2階微分の零点の数は相異なる極の数よりも漸近的にはたくさんある、という定理である。その証明ではこれまででは不等式としてしか知られていなかった有理型関数の第二主要定理を漸近的な等式として定式化する方法を考案した。山ノ井はこの成果を含む一連の業績により2013年度日本数学会幾何学賞を受賞した。

吉川謙一は解析的捩率の研究を進めた。馬昭平氏と共同で対合付き $K3$ 曲面の解析的捩率不変量をモジュライ空間上の保型形式として決定した。その結果、解析的捩率不変量に対応する保型形式が常にBorchers積とテータ定数の積として表される事およびBorchers積の原料となる楕円モジュラー形式が統一的に構成される事が判明した。Borcea-Voisin型Calabi-Yau多様体のBCOV不変量と対合付き $K3$ 曲面の解析的捩率不変量の等価性を示した。その結果を併せて、Borcea-Voisin型Calabi-Yau多様体のBCOV不変量が決定された。川口周氏、向井茂氏と共同でBorchers関数の代数的表示を導きその応用として、次数2のテータ定数のBorchers型無限積展開を得た。

奥間智弘は特異点の研究を進めた。2次元ブリスコーン完全交叉特異点の最小良特異点解消空間上の極大イデアルサイクル、基本サイクル、標準サイクル、基本種数を具体的に記述した。また複素2次元特異点の特異点解消空間上のpg-cycleと、それによって定義されるpg-idealの概念を導入し、pg-idealに関する基本性質を研究した。その応用として特異点の埋め込み次元の評価式を与え、イデアルのコアの公式を求め、極大イデアルがgood idealになるゴレンスタイン特異点を特徴づけた(渡辺敬一氏、吉田健一氏との共同)。

伊師英之は表現論を用いた複素解析の研究を進め、有界等質領域上の等質ケーラー計量の量子化可能性を完全に決定した(A. Di Scala氏、A. Loi氏と共同)。また等質アインシュタイン・ケーラー計量(ベルグマン計量の定数倍)の量子化として構成されるユニタリ表現を決定し、それらが互いに非同値であ

ることを示した。これにより一般の等質ケーラー多様体の量子化として現れるユニタリ表現は、最高ウェイトユニタリ表現に他ならないことが判明した。この結果はボレル・ヴェイユの定理の自然な一般化であり、等質ケーラー多様体の量子化という問題が、表現論においても非常に意義深いことを示している。

高山茂晴は複素解析的手法を用いて特異エルミート計量の正值性を研究した。複素多様体間の射影的な正則写像 $f: X \rightarrow Y$ を考える。 f は Y の開集合上で滑らかとし、 f の一般ファイバーの小平次元は半正とする。このとき相対多重標準束 $mK_{X/Y}$ に標準的に定まる特異エルミート計量 h_m を入れることができ、そしてその順像層 $f_*(mK_{X/Y})$ には h_m に付随して定まる Narasimhan-Simha 特異エルミート計量と呼ばれる特異エルミート計量 g_m を入れことができる。これらの計量がともに (Griffiths の意味で) 半正な曲率をもつことを示した。証明には L^2 拡張定理の変種である $L^{2/m}$ 拡張定理が基本的な役割を果たす；この部分は Paun 氏との共同研究である。

神本文は実解析学や調和解析学で重要な研究対象である振動積分の漸近展開をニュートン多面体という特異点論的な概念を導入して研究した。特に、相関数が実解析性を持たない場合について、興味深い結果を得た。

松村慎一は最終年度に連携研究者として加わり、乗数イデアル層を用いたコホモロジーの単射性定理を定式化し証明した。漸近的な消滅定理を応用することで、最小特異計量に対する Nadel 型のコホモロジー消滅定理も得た。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計63件)

Honda, N., Double solid twistor spaces II: general case, J. Reine Angew. Math. 698 (2015), 181-220. 査読有り

Mabuchi, T., Relative stability and extremal metrics, J. Math. Soc. Japan 66 (2014), 535-563. 査読有り

Hirachi, K., Q-prime curvature on CR manifolds, Differential Geom. Appl. 33 (2014), suppl., 213-245. 査読有り

Ohsawa, T., Classification of real analytic Levi flat hypersurfaces of

1-concave type in Hopf surfaces, Kyoto J. Math. 54 (2014), 547-553. 査読有り

Honda, N., Moishezon twistor spaces on $4CP^2$, J. Algebraic Geom. 23 (2014), 471-538. 査読有り

Yamanoi, K., Zeros of higher derivatives of meromorphic functions in the complex plane. Proc. Lond. Math. Soc. 106 (2013), 703-780. 査読有り

Yoshikawa, K.-I., K3 surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space, II: A structure theorem for $r(M) > 10$, J. Reine Angew. Math. 677 (2013), 15-70. 査読有り

Takayama, S., A local ampleness criterion of torsion free sheaves. Bull. Sci. Math. 137 (2013), 659-670. 査読有り

Ohsawa, T., Nonexistence of certain Levi flat hypersurfaces in Kähler manifolds from the viewpoint of positive normal bundles, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 49 (2013), 229-239. 査読有り

Yoshikawa, K.-I., K3 surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space III: the case $r(M) \geq 18$. Math. Z. 272 (2012), 175-190. 査読有り

Corvaja, P.; Noguchi, J., A new unicity theorem and Erdős' problem for polarized semi-abelian varieties. Math. Ann. 353 (2012), 439-464. 査読有り

Di Scala, A.; Ishi, H.; Loi, A., Kähler immersions of homogeneous Kähler manifolds into complex space forms, Asian J. Math. 16 (2012), 479-487. 査読有り

Tsuji, H., Canonical singular Hermitian metrics on relative canonical bundles, Amer. J. Math. 133 (2011), 1469-1501. 査読有り

〔学会発表〕(計197件)

高山茂晴, Degenerations of polarized Ricci-flat Kähler manifolds, Complex analysis, 2014/8/27, MF0, Oberwolfach (ドイツ)

平地健吾, Q-prime curvature in CR geometry, ICM Seoul, 2014/8/14 (韓国)

山ノ井克俊, 有理型関数の導関数の値分布, 幾何学賞授賞講演 2013/9/25, 愛媛大学 (愛媛県松山市)

大沢健夫, Levi flats in Hopf surfaces, THE ABEL SYMPOSIUM 2013 Complex geometry, 2013/7/04, Trondheim (ノルウエー)

大沢健夫, A survey on the vanishing theorems of Grauert-Riemenschneider type, Conference on complex geometry in memory of Hans Grauert, 2012/9/17, Göttingen(ドイツ)

野口潤次郎, On Oka's extra-zero problem and related topics, Complex Analysis and Algebraic Geometry, CIRM, 2011/10/18, Marseille (フランス)

満淵俊樹, Moduli space of test configurations, Differentialgeometrie im Grossen, 2011/7/6, MFO, Oberwolfach(ドイツ)

吉川謙一, Analytic torsion of certain Calabi-Yau threefolds and Borcherds product Automorphic forms, Kac-Moody algebras and Strings, Max Planck数学研究所, 2010/5/11, Bonn (ドイツ)

本多宣博, 自己双対多様体のツイスター空間について, 幾何学賞授賞講演, 2010/9/24 名古屋大学(愛知県名古屋市)

満淵俊樹, An extremal Kaehler version of Donaldson-Tian-Yau's conjecture, PRIMA conference on Geometric Analysis, 2010/7/30, Univ. British Columbia, Vancouver (カナダ)

[図書](計3件)

大沢健夫, 岡潔・多変数関数論の建設, 現代数学社 2014, 227頁

Noguchi, J.; Winkelmann, J., Nevanlinna theory in several complex variables and Diophantine approximation, Springer 2014, xiv+416頁

野口潤次郎, 多変数解析関数論 -- 学部生へおくる岡の接続定理--, 朝倉書店 2013, 370頁

[その他]

ホームページ

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

平地 健吾 (HIRACHI, Kengo)
東京大学・数理科学研究科・教授
研究者番号: 60218790

(3) 連携研究者

高山 茂晴(TAKAYAMA, Shigeharu)
東京大学・数理科学研究科・教授
研究者番号:20284333

吉川 謙一(YOSHIKAWA, Ken-Ichi)
京都大学・理学研究科・教授
研究者番号:20242810

大沢 健夫(OHSAWA, Takeo)
名古屋大学・多元数理研究科・教授
研究者番号:30115802

辻 元(TSUJI, Hajime)
上智大学・理工学部・教授
研究者番号:30172000

本多 宣博(HONDA, Nobuhiro)
東京工業大学・理工学研究科・教授
研究者番号:60311809

山ノ井 克俊(YAMANOI, Katsutoshi)
東京工業大学・理工学研究科・准教授
研究者番号:40335295

伊師 英之(ISHI, Hiseyuki)
名古屋大学・多元数理研究科・准教授
研究者番号:00326068

野口 潤次郎 (NOGUCHI, Junjiro)
東京大学・数理科学研究科・名誉教授
研究者番号:20033920

山口 佳三 (YAMAGUCHI, Keizo)
北海道大学・理学研究科・教授
研究者番号:00113639

満淵 俊樹 (MABUCHI, Toshiki)
大阪大学・理学研究科・教授
研究者番号:80116102

奥間 智弘(OKUMA, Tomohiro)
山形大学・理学部・教授
研究者番号:00300533
(平成24年度より連携研究者)

神本 丈(KAMIMOTO, Joe)
九州大学・理学研究科・准教授
研究者番号:90301374
(平成26年度より連携研究者)

松村 慎一 (MATSUMURA, Shin-Ichi)
鹿児島大学・理工学研究科・助教
研究者番号:90647041
(平成26年度より連携研究者)