様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ５ 月 ２５ 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：基盤研究(B)
研究期間：2010～2014
課題番号：２２３４００００８

研究課題名（和文）進化するグレブナー基底の理論を戦略とする凸多面体を巡る未解決問題の探究

研究課題名（英文）Study on open problems arising from convex polytopes with strategies of the developed theory of Groebner bases

研究代表者
日比　孝之（HIBI, Takayuki）

大阪大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：８０１８１１１３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　10,200,000円

研究成果の概要（和文）：グレブナー基底の従来の研究を踏襲し、その現代的理論を発展させるとともに、グレブナー基底を発掘するための斬新なテクニックを開拓し、凸多面体の代数的組合せ論と可換代数における単項式イデアルの理論を著しく発展させることに成功した。特に、Gorenstein ファノ凸多面体の斬新な類を提唱し、有限グラフに付随する辺イデアルの正則性を探究するとともに、二項辺イデアルの概念を導入し、その基礎理論を樹立した。

研究成果の概要（英文）：Following our current study on Groebner bases, we evolved the modern theory of Groebner bases and broke original techniques to discover new Groebner bases. As a result, we succeeded in developing remarkably the algebraic combinatorics on convex polytopes as well as the theory of monomial ideals in commutative algebra. Especially, new classes of Gorenstein Fano polytopes were created, and the regularity of edge ideals of finite graphs was deeply studied. Furthermore, the concept of binomial edge ideals of finite graphs was introduced and its fundamental theory was established.

研究分野：計算可換代数と組合せ論

キーワード：グレブナー基底　凸多面体　単項式イデアル　ファノ凸多面体　有限グラフ　辺イデアル　二項式辺イデアル

１．研究開始当初の背景

研究代表者は、1983 年以降、凸多面体と単体的複体の組合せ論の具象論を、可換代数のテクニック、特に、Cohen--Macaulay 環の抽象論を駆使し、発展させることに成功した。特に、有限分配束に付随するトーリック環の研究は、その後、 Bruhat--Hibi トーリック多様体などの研究に継承されている。

（１）1995 年以降、欧州の可換代数の権威者 Jürgen Herzog らとともに、squarefree な単項式で生成されるイデアルの理論を展開した。外積代数におけるグレブナー基底の理論を樹立し、componentwise linear イデアルの概念を提唱し、Alexander duality の有効性を披露するなど、squarefree イデアルの研究の重要性を唱えた。

（２）他方、1996 年以降、大杉英史とともに、グレブナー基底の代数的基礎理論、特に、トーリックイデアルの理論を展開し、凸多面体の三角形分割の代数的組合せ論を飛躍的に発展させた。顕著な成果の一つは、性質「単体の個数が最大となる三角形分割も、最小となる三角形分割も、両者とも非正則である」を持つ凸多面体の発見である。加えて、根系に付随する二次二項式から成るグレブナー基底を研究し、単模かつ旗状な三角形分割を持つ凸多面体の豊富な系列を構成した。

２．研究の目的

本基盤研究の研究対象は、凸多面体と単項式イデアルである。凸多面体の研究には、伝統的な組合せ論のテクニックに加え、代数的なテクニックが不可欠である。他方、単項式イデアルは、昨今の可換代数の流行の話題であり、有限束、有限グラフなど、組合せ論との深い関連を保ちながら発展している。

（１）二次二項式から成る被約グレブナー基底を持つファノ凸多面体の斬新な類を提唱する。（ファノ凸多面体のトーリックイデアルの、原点をもっとも弱くする逆辞書式順序に関する被約グレブナー基底が二次二項式から成るならば、その Fano 凸多面体は、いわゆる Gorenstein Fano 凸多面体である。）

（２）著名な Segre--Veronese 配置のトーリックイデアルは二次二次二項式から成る被約グレブナー基底を持つ。この事実を踏まえ、Segre--Veronese 配置の一般化を模索する。

（３）有限束に付随する join--meet イデアルに関する根基性予想と呼ばれる懸案の予想に、肯定、否定の両面から挑戦する。

（４）有限グラフの辺凸多面体のトーリック環のトーリックイデアル、および、そのイニシャルイデアルの深さ（いわゆる depth と呼ばれる）の下限に関する研究を推進する。

（５）有限グラフの辺イデアルの正則度を、有限グラフのマッチング数の観点から発展させる。具体的には、辺イデアルの代数的不変量である正則度と有限グラフの組合せ論的不変量である最小マッチング数、誘導マッチング数などとの相互関係を探究する。

（６）有限グラフの二項式辺イデアルの代数的基礎理論を樹立させる。たとえば、二項式辺イデアルの被約グレブナー基底を有限グラフの言葉で記述し、Cohen--Macaulay となる二項式辺イデアルを分類するなど。

（７）Gorenstein ファノ凸多面体の膨らましに含まれる格子点の個数の数え上げ函数（いわゆる Ehrhart 多項式）の根は、複素平面上、z = - 1/2 に関して対象に分布している。その分布の状況を探究する。

（８）整凸多面体論の魅惑的な未解決問題の一つは、δ列の組合せ論的な特徴付けを探すことである。従来から、研究代表者らは、その未解決問題を、代数と組合せ論の両面から研究することを継続しているが、本基盤研究でも、その研究を踏襲するとともに、正規整凸多面体のδ列の単峰性も考察する。

３．研究の方法

本基盤研究の目的を達成するための、戦略を列挙する。

（１）グレブナー基底の研究を展開する際の両輪となるのが「計算」と「理論」である。一般に、グレブナー基底のどのような理論を築くにも、計算機実験とその結果の検証が不可欠である。しかしながら、変数の個数と生成元の個数が膨大になると、計算機実験をすることすら困難である。従って、少ない実験データから、グレブナー基底の構造の本質を見抜くための訓練が必須となる。グレブナー基底の具体的な未解決問題を議論しながら、そのような訓練を実施し、腕を磨く。

（２）研究代表者らは、嘗て、「素手」と呼ばれるグレブナー基底を発掘する有効なテクニックを開発し、著名な配置のグレブナー基底を発見することに成功している。そのテクニックを駆使する際は、しかしながら、豊富な経験と熟練した勘が不可欠である。そのような豊富な経験と熟練した勘を、なんらかの理論に昇華させ、「素手」計算のアルゴリズムの開発に着手する。

（３）一般に、多項式環のイデアルのグレブナー基底は、そのイデアルの生成系から、いわゆる Buchberger アルゴリズムを使って計算する。しかし、そのアルゴリズムの計算量は膨大になることがほとんどであり、効率性はかなり悪い。昨今、イデアル商を使うアルゴリズムなどの開発に加え、計算代数ソフトの劇的な飛躍により、嘗ては、計算不可能であったグレブナー基底も計算可能になりつつあるが、十分な規模の問題を扱える水準に到達しているとは言い難い。そのような状況を打破する秘策の一つとして、既知のグレブナー基底を豊富に蓄積している「辞書」を作成する。その「辞書」を駆使すれば、大規模なグレブナー基底の計算をする際、「辞書」に載っているグレブナー基底の幾つかを使うことから、計算を部分的に省略することが可能になり、グレブナー基底の計算の高速化に貢献することが期待される。

４．研究成果

本基盤研究の主たる研究成果を列挙する。

（１）中心的対称配置の概念を提唱（［３０］）し、Gorenstein ファノ凸多面体の豊富な例を構成する一般論を構築した。中心的対称配置は、その後、統計モデルの発掘にも有効であることが判明し、目下、興味深い研究が展開されている（arXiv:1502.02323）。

（２）完全単純模行列の理論を基礎とし、有限半順序集合に付随する Gorenstein ファノ凸多面体を定義し、それが非特異になるための必要十分条件を有限半順序集合の言葉で記述することに成功した（［７］）。

（３）Segre--Veronese 配置の理論の一般化となる、入れ子配置の概念を提唱（［３］）し、そのトーリック環とトーリックイデアルに関する基礎理論を樹立した。

（４）有限束に付随する join--meet イデアルに関する根基性予想と呼ばれる懸案の予想を探究（［２０］）し、計算機実験を補助とし、その予想の反例を有限モジュラー束で構成し、懸案の未解決予想を否定的に解決した。

（５）有限グラフの edge ring の深さの下限を研究し、7≦f≦d を満たす任意の自然数 f と d について、次元が d で深さが f となる edge ring が存在することを示した（［９］）。

（６）正規 edge ring のトーリックイデアルのイニシャルイデアルの深さを研究し、6≦f≦d を満たす任意の自然数 f と d について、逆辞書式順序に関するイニシャルイデアルの深さが f であり、辞書式順序に関するイニシャルイデアルの深さが d となる正規 edge ring が存在することを示した（［２４］）。

（７）有限グラフの辺イデアルの正則度の理論を、有限グラフのマッチング数の観点から探究し、誘導マッチング数とマッチング数が一致するグラフ（Cameron--Walker グラフ）の環論的諸性質を探究した（［３１］）。たとえば、Cameron--Walker グラフは、頂点分解可能であること（すると、特に、sequentially Cohen--Macaulay であること）を示し、更に、Cohen--Macaulay となる Cameron--Walker グラフを分類した。他方、Gorenstein となる Cameron--Walker グラフの非存在を証明した。この研究は、誘導マッチング数と最小マッチング数が一致するグラフの研究に踏襲されている（arXiv:1412.3881）。

（８）有限グラフに付随する二項式辺イデアルの概念を提唱し、その代数的基礎理論を構築した（［４、１２、２８］）。顕著な成果を挙げる。第１に、二項式辺イデアルのグレブナー基底で、平方自由なイニシャルイデアルを持つものを発見し、その結果、二項式辺イデアルは根基イデアルであり、その剰余環は被約であることを導いた。第２に、二項式辺イデアルの極小素イデアルを有限グラフの頂点を使って記述した。第３に、或る類に属する有限グラフの二項式辺イデアルの深さを計算し、閉グラフでその二項式辺イデアルが Cohen--Macaulay となるものを分類した。

（９）Gorenstein ファノ凸多面体の膨らましに含まれる格子点の個数の数え上げ函数である Ehrhart 多項式の根の分布の状況を探究した（［８］）。その結果、整数 0≦2k≦d が任意に与えられたとき、次の条件(i)--(iv)を満たす次元 d の Gorenstein ファノ凸多面体 P を構成した。(i) P の Ehrhart 多項式は d 個の異なる根を持つ；(ii)虚根は 2k 個、実根は d － 2k 個ある；(iii)それぞれの虚根の実部は －1/2 である；(iv)すべての実根は、開区間(- 1, 0)に属する。

（１０）整凸多面体論の魅惑的な未解決問題である、δ列の組合せ論的な特徴付けの探索を継続（［６、１４］）し、特に、正規化体積が４以下の整凸多面体論のδ列の組合せ論的な特徴付けを得ることに成功した。その他、Ehrhart 多項式の係数に関する未解決問題「次元 d の整凸多面体論の Ehrhart 多項式で、その i 次の係数（但し、1≦i≦d-3）がすべて負となるものを発見せよ。」を解決した（arXiv:1312.7049）。

（１１）変数を成分とする行列があったとき、隣接 2 マイナーが生成する二項式イデアルに関する研究を遂行（［１６］）し、そのようなイデアルで、二次のグレブナー基底を持つものを分類するとともに、そのようなイデアルの根基の素イデアル分解を記述した。更に、そのようなイデアルで、根基イデアルとなるものの分類に挑戦し、部分的ではあるものの、有益な結果を得た。他方、そのようなイデアルが有限グラフの辺多面体のトーリックイデアルと一致するための必要十分条件を求めた（［２７］）。

（１２）巡回凸多面体が正規となるための十分条件、および、巡回凸多面体が very ample とはならない十分条件を、それぞれ、求めた（［２３］）。更に、巡回凸多面体のトーリック環が正規であることと Cohen--Macaulay であることと Serre の条件(S2)を満たすことが同値であることを証明した（［３２］）。

（１３）有限グラフの edge ring が Serre の条件(R1)を満たすための効果的な判定条件を求めた（［２５］）。

（１４）有限グラフの辺凸多面体を超平面で分離して得られる整凸多面体を議論し、そのような分離して得られる整凸多面体は、再び、有限グラフの辺凸多面体であることを示した。更に、辺凸多面体が正規であることと、分離して得られる二つの辺凸多面体が正規であることが同値であることを証明した（［１７］）。整凸多面体を超平面で分離して整凸多面体を得る作業はきわめて自然であり、順序凸多面体と鎖凸多面体を分離する研究も展開されている（arXiv:1402.3805）。

（１５）半順序集合 P の順序凸多面体 O(P)と鎖凸多面体 C(P)が unimodular 同値となるためには、その半順序集合がＸ型の半順序集合(1<3,2<3,3<4,3<5)を部分半順序集合として含まないことが必要十分であることを証明した（arXiv:1208.3204）。

（１６）有限半順序集合の鎖凸多面体のトーリック環が、有限分配束上の algebra with straightening laws であることを示し、鎖凸多面体が正則単模旗三角形分割を持つことを示した（arXiv:1207.2538)。
（１７）単項式イデアルの深さ函数で、与えられた個数の局所最大値を持つものを構成することに成功した（［２２］)。
（１８）整凸多面体 P の膨らまし nP が整分割性を持つような n の値を調べ、一般論を得るとともに、貴重な例を構成した（［２９］)。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 35 件）
［1］T. Hibi, K. Kimura and S. Murai, Betti numbers of chordal graphs and f-vectors of simplicial complexes, J. Algebra 323 (2010), 1678--1689.
［2］S. Aoki, T. Hibi, H. Ohsugi and A. Takemura, Markov basis and Gröbner basis of Segre--Veronese configuration for testing independence in group-wise selections, Ann. Inst. Statist. Math. 62 (2010), 299--321.
［3］H. Ohsugi and T. Hibi, Toric rings and ideals of nested configurations, J. Commut. Algebra 2 (2010), 187--208.
［4］J. Herzog, T. Hibi, F. Hreinsdottir, T. Kahle and J. Rauh, Binomial edge ideals and conditional independence statements, Adv. in Appl. Math. 45 (2010), 317--333.
［5］H. Ohsugi and T. Hibi, Non-very ample configurations arising from contingency tables, Ann. Inst. Statist. Math. 62 (2010), 639--644.
［６］T. Hibi, A. Higashitani and Y. Nagazawa, Ehrhart polynomials of convex polytopes with small volumes, European J. Combin. 32 (2011), 226--232.
［7］T. Hibi and A. Higashitani, Smooth Fano polytopes arising from finite partially ordered sets, Discrete Comput. Geom. 45 (2011), 449--461.
［8］T. Hibi, A. Higashitani and H. Ohsugi, Roots of Ehrhart polynomials of Gorenstein Fano polytopes, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), 3727--3734.
［9］T. Hibi, A. Higashitani,K. Kimura and A. B. O'Keefe, Depth of edge rings arising from finite graphs, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), 3807--3813.
［１０］J. Herzog, T. Hibi and H. Ohsugi, Powers of componentwise linear ideals, in ``Combinatorial Aspects of Commutative Algebra and Algebraic Geometry,'' Abel Symp., vol. 6, Springer, Berlin, 2011, pp. 49--60.
［１１］T. Hibi, T. Matsui, A. Higashitani, Y. Nagazawa and H. Ohsugi, Roots of Ehrhart polynomials arising from graphs, J. Algebraic Combin. 34 (2011), 721--749.
［１２］V. Ene, J. Herzog and T. Hibi, Cohen--Macaulay binomial edge ideals, Nagoya Math. J. 204 (2011), 57--68.
［１３］Yu Kawano, T. Ohtsuka and T. Hibi, Nilpotency of a finitely iterated polynomial map, Int. J. Algebra 5 (2011), 1475--1479.
［１4］T. Hibi, A. Higashitani and N. Li, Hermite normal forms and δ-vectors, J. Combin. Theory Ser. A 119 (2012), 1158--1173.
［１５］J. Herzog and T. Hibi, Finite lattices and Gröbner bases, Math. Nachr. 285 (2012), 1969--1973.
［１６］J. Herzog and T. Hibi, Ideals generated by adjacent 2-minors, J. Commut. Algebra 4 (2012), 525--549.
［１７］T. Hibi, N. Li and Y. Zhang, Separating hyperplanes of edge polytopes, J. Combin. Theory Ser. A 120 (2013), 218--231.
［１8］V. Ene, J. Herzog, T. Hibi and F. Mohammadi, Determinantal facet ideals, Michigan Math. J. 62 (2013), 39--57.
［１９］S. Aoki T. Hibi and H. Ohsugi, Markov chain Monte Carlo methods for the regular two-level fractional factorial designs and cut ideals, J. Statist. Plann. Inference 143 (2013), 1791--1806.
［２０］V. Ene and T. Hibi, The join-meet ideal of a finite lattice, J. Commut. Algebra 5 (2013), 209--230.
［２１］H. Ohsugi and T. Hibi, Toric ideals and their circuits, J. Commut. Algebra 5 (2013), 309--322.
［２２］S. Bandari, J. Herzog and T. Hibi, Monomial ideals whose depth function has any given number of strict local maxima, Ark. Mat. 52 (2014), 11--19.
［２３］T. Hibi, A. Higashitani, L. Katthän and R. Okazaki, Normal cyclic polytopes and cyclic polytopes that are not very ample, J. Aust. Math. Soc. 96 (2014), 61--77.
［２４］T. Hibi, A. Higashitani, K. Kimura and A. B. O'Keefe, Depth of initial ideals of normal edge rings, Comm. Algebra 42 (2014), 2908--2922.
［２５］T. Hibi and L. Katthän, Edge rings satisfying Serre's condition (R1), Proc. Amer. Math. Soc. 142 (2014), 2537--2541.
［２６］T. Hibi, K. Nishiyama, H. Ohsugi and A. Shikama, Many toric ideals generated by quadratic binomials possess no quadratic Gröbner bases, J. Algebra 408 (2014), 138--146.

［２７］H. Ohsugi and T. Hibi, Toric ideals of finite graphs and adjacent 2-minors, Math. Scand. 114 (2014), 185--190.
［２８］V. Ene, J. Herzog, T. Hibi and A. A. Qureshi, The binomial edge ideal of a pair of graphs, Nagoya Math. J. 213 (2014), 105--125.
［２９］D. A. Cox, C. Haase, T. Hibi and A. Higashitani, Integer decomposition property of dilated polytopes, Electron. J. Combin. 21 (2014), Paper 4.28, 17 pp.
［３０］H. Ohsugi and T. Hibi, Centrally symmetric configurations of integer matrices, Nagoya Math. J. 216 (2014), 153--170.
［３１］T. Hibi, A. Higashitani, K. Kimura and A. B. O'Keefe, Algebraic study on Cameron--Walker graphs, J. Algebra 422 (2015), 257--269.
［３２］T. Hibi, A. Higashitani, L. Katthän and R. Okazaki, Toric rings arising from cyclic polytopes, Comm. Algebra 43 (2015), 778--794.
［３３］V. Ene, J. Herzog, T. Hibi and S. S. Madani, Pseudo-Gorenstein and level Hibi rings, J. Algebra 431 (2015), 138--161.
［３４］J. Herzog, T. Hibi and A. A. Qureshi, Polarization of Koszul cycles with applications to powers of edge ideals of whisker graphs, Proc. Amer. Math. Soc. 143 (2015), 2767--2778.
［３５］V. Ene, J. Herzog and T. Hibi, Linearly related polyominoes, J. Algebraic Combin. 41 (2015), 949--968.

〔学会発表〕（計 10 件）
［1］T. Hibi, Roots of Ehrhart polynomials of Gorenstein Fano polytopes, 2010 Clifford Lectures（招待講演）, Tulane University, LA, USA, 2010.03.27.
［2］T. Hibi, Roots of Ehrhart polynomials of Gorenstein Fano polytopes, Discrete Geometry and Combinatorics Seminar（招待講演）, Cornell University, Ithaca, NY, USA, 2011.03.14.
［3］T. Hibi, Normal cyclic polytopes, MIT Combinatorics Seminar（招待講演）, MIT, Cambridge, MA, USA, 2012.03.21.
［4］T. Hibi, An introduction of holonomic gradient descent, Algebraic Statistics in the Alleghenies（招待講演）, Pennsylvania State University, PA, USA, 2012.06.13.
［5］日比孝之, 統計学とグレブナー基底, 代数学シンポジウム（招待講演）, 京都大学, 2012 年 8 月 20 日.
［６］T. Hibi, Normality of dilated polytopes, MIT Combinatorics Seminar（招待講演）, MIT, Cambridge, MA, USA, 2013.03.13.
［７］T. Hibi, Cameron--Walker graphs, Commutative Algebra and Its Interaction to Algebraic Geometry（招待講演）, Hanoi, Vietnam, 2013.12.16.
［８］T. Hibi, Stanley's influence on monomial ideals, A Conference in Honor of Richard P. Stanley's 70th Birthday（招待講演）, MIT, Cambridge, MA, USA, 2014.06.25.
［9］T. Hibi, A survey on monomials ideals, Workshop on Representation Theory（招待講演）, NUS, Singapore, 2014.07.23.
［１０］日比孝之, 二項式イデアルのグレブナー基底, 数式処理とその周辺分野の研究（招待講演）, 京都大学数理解析研究所, 2014 年 12 月 25 日.

〔図書〕（計 3 件）
［1］J. Herzog and T. Hibi, ``Monomial Ideals,'' Graduate Texts in Math. 260, Springer--Verlag, London, 2011, xvi+305 pp., ISBN: 978-0-85729-105-9.
［2］JST CREST 日比チーム（編）『グレブナー道場』（共立出版）2011 年, 557 ページ, ISBN: 978-4320019768.
［３］T. Hibi, Ed., Gröbner Bases: Statistics and Software Systems, Springer--Verlag, London, 2013, vii+474 pp., ISBN: 978-4431545736.

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等
http://www.dma.jim.osaka-u.ac.jp/view?u=6874

６．研究組織
(1)研究代表者
日比　孝之（HIBI, Takayuki）
大阪大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号：80181113

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
大杉　英史（OHSUGI, Hidefumi）
関西学院大学・理工学部・教授
研究者番号：80350289

村井　聡（MURAI, Satoshi）
大阪大学・大学院情報科学研究科・准教授
研究者番号：90570804