

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 23 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2014

課題番号：22340009

研究課題名(和文) 広義カラビ・ヤウ多様体と有理多様体の複素力学系的観点からの研究

研究課題名(英文) Rational manifolds and Calabi-Yau manifolds in the view of complex dynamics

研究代表者

小木曾 啓示 (OGUISO, Keiji)

大阪大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：40224133

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 9,600,000円

研究成果の概要(和文)：複素力学系及び双有理幾何学の融合により、双方の未解決問題に貢献すること、関係する新しい現象の発見が本研究の主目的である。成果として、正のエントロピーをもちかつ原始的正則自己同型を許容する3次元有理多様体、カラビ・ヤウ多様体の存在問題の肯定的解決、Wehler型と呼ばれる任意次元のカラビ・ヤウ多様体に対するKawamata-Morrison錐予想の完全解決、Ueno-Campana問題の肯定的解決、Gizatullin問題の否定的解決、正標数の代数幾何への複素力学系の応用などを得た。また、成果が高く評価され、2014年の国際数学会議の招待講演者に選定された。

研究成果の概要(英文)：Blending birational algebraic geometry and complex dynamics, I found, in my own works and my joint works, the first explicit examples of three dimensional rational manifolds and Calabi-Yau manifolds with biregular primitive automorphisms of positive entropy, a complete affirmative answer to the Kawamata-Morrison cone conjecture when the manifolds are Calabi-Yau manifolds of Wehler type, of any dimension, an affirmative answer to the Ueno (Ueno-Campana) problem on the unirationality of certain threefolds of quotient type, a negative answer to the Gizatullin problem on the automorphisms of quartic K3 surfaces and the Cremona group of the ambient projective three space, as well as some new applications of complex dynamics to the liftability problem of automorphisms of K3 surfaces in positive characteristic. These works are highly estimated and I was elected an invited speaker of the International Congress of Mathematicians 2014 held at Seoul, Korea.

研究分野：代数幾何学

キーワード：双有理変換 双正則変換 エントロピー ダイナミカル次数 有理多様体 カラビ・ヤウ多様体

1. 研究開始当初の背景

21世紀初頭に現れた、フィールズ賞受賞者 McMullen 教授による非射影的 K3 曲面の自己同型群の研究、Cantat 教授による正のエントロピーをもつ自己同型を許容する複素解析的曲面の分類以降、従来からある双有理代数幾何的視点に加え、複素力学系的視点を取り入れた代数多様体・複素多様体の自己同型・双有理自己同型の研究が盛んになっている。エントロピーが正であるというのは大雑把には一般点軌道が十分に拡散することであり、多様体の一般の 2 点は目で区別できないくらい近い点であったとしても自己同型で点をどんどん写していけばそのうち目で区別できるくらいに拡散することを意味する。このように一般点軌道の拡散の様子が複素力学系の中心的問題である。他方、そのような双正則あるいは双有理自己同型を許容する多様体はどんな多様体であるかを明らかにすることが代数幾何学・双有理代数幾何学での中心的な問題の一つであった。筆者は複素力学系的観点からの高次元双有理代数幾何学の展開可能性にいち早く気づきその発展に貢献してきた。McMullen 教授の構成した K3 自己同型とその構成方法に着目すれば、Voisin 教授による衝撃的成果である高次元小平問題の反例を少し強くした「単連結多様体による反例ができるに違いない。」と気づいたこと、「超ケーラー多様体の双有理変換群の群論的構造が明らかにできるに違いない」と気づいたことが当該研究着想の個人的出発点となった。その後、Sibony 教授、Dinh 教授、Truong 博士、De-Qi Zhang 教授らの貢献も経て、現在では、正のエントロピーをもち、更に原始的と呼ばれる与えられた次元特有の正則自己同型を許容する多様体の存在・非存在問題(及び存在する場合には多くの具体的実例を与えること)が当該分野における代数幾何学的中心問題である。高次元極小モデル理論が理想的に機能すれば、候補となりうる多様体は有理連結多様体、広い意味でのカラビ・ヤウ多様体あるいは複素トーラスと双有理な多様体に限られる (De-Qi Zhang 教授.)。この中で、前者 2 クラスが本質的であり、特に重要なのが、有理多様体、カラビ・ヤウ多様体、(コンパクト)超ケーラー多様体である。

2. 研究の目的

正のエントロピーをもち、更に原始的と呼ばれる与えられた次元特有の正則自己同型を許容する多様体の存在・非存在問題(及び存在する場合には多くの具体的実例を与えること)、特に、有理連結多様体、広い意味でのカラビ・ヤウ多様体

あるいは複素トーラスと双有理な多様体に対し、それらの多様体のもつ双有理代数幾何学的構造の解明とともに、双有理代数幾何学・複素力学系双方の観点・手法を融合させてこの問題を解決すること、及び関係する新しい現象の発見、従来からある未解決問題への貢献が本研究の主目的である。

3. 研究の方法

複素力学系的観点からの高次元双有理代数幾何学の展開可能性と高次元双有理代数幾何学の融合の追及が主な研究方法である。もちろん、数学の研究であるから、普段からの地道な努力・文献の精査や個人あるいは少数による共同研究の集中的推進が最重要であることは言うまでもない。その成果については 4 で述べる。一方で、分野をまたがった当該研究推進には、このような地道な研究活動とともに、代数幾何学と複素力学系研究者双方の研究者間の交流も重要であると考えた。そのため、20 名以上の海外招待者を招いての国際研究集会 “Automorphisms of algebraic varieties - Dynamics and Arithmetic” (Shirahama, Wakayama, December 19-23 2011) を盛田健彦教授、金銅誠之教授、川口周教授と共同で開催した。現在では、毎年どこかで同様の国際研究集会が開かれるほどに研究交流も盛んになっている。また、より双有理代数幾何学に焦点をおいた国際研究集会 “Higher dimensional algebraic geometry - in honour of Professor Yujiro Kawamata’s sixtieth birthday” (Tokyo, January 7-11 2013) を Caucher Birkar 教授、石井志保子教授、高山茂晴教授と共同で開催した。こちらも、著名海外講演者 18 名を含む参加者が 100 名を越える大規模かつ有意義な研究集会となった。これら 2 つの研究集会開催を機に当該研究目標に向けた新たな共同研究も生まれた。また、国内外の研究集会にも積極的に参加し参加者と交流をもつことで、研究成果のアピールとともに、新しいアイデアや問題意識の発見にも努めた。

4. 研究成果

まず特筆すべきことは、当該研究における一連の成果が極めて高く評価され、2014 年 8 月にソウルで開催された国際数学会議 (ICM) の招待講演者に選定されたことである。国際数学会議は 4 年に一度開催される。40 歳以下の卓越した数学者 2-4 名に授与されるフィールズ賞で有名な、数学では最も権威ある国際会議である。2014 年は韓国ソウルで開催され、5000 人以上の参加者があつ

た。招待講演者は基調講演者 20 名余を含む 200 名余であり、日本からは私を含む 6 名の招待講演者(うち 1 名は基調講演者)が選定された。国際数学会議の招待講演者に選定されることは一流数学者の証である。筆者の数学的力量から考えて、当該研究申請時の予想を遥かに超えた、生涯において成し得る最大の成果となった。

ICM の招待講演では、“Some aspects of explicit birational geometry inspired by complex dynamics” という題目のもと、研究成果である正のエントロピーをもち、更に原始的正則自己同型を許容する 3 次元有理多様体、カラビ・ヤウ多様体の存在の肯定的解決 (Truong 博士との共同研究)、Kawamata-Morrison 錐予想の Wehler 型と呼ばれる任意次元のカラビ・ヤウ多様体に対する完全解決 (Cantat 教授との共同研究, American J. Math. への掲載決定済) について、当該分野の基礎と発展を俯瞰する講演を行った。ともに、当該研究における大きな成果であり、双有理代数幾何学と複素力学系の融合の中で初めて生まれたよい成果であると自負している。特に、前者は、当該研究の主テーマ-正のエントロピーをもち原始的正則自己同型を許容する 3 次元多様体の存在-に対する最初の肯定的解決である。

ひとつの副産物として、Ueno-Campana 問題-ある種の 3 次元トーラス商の単有理性問題-に肯定的解決を与えた (Catanese 教授, Truong 博士との共同研究)。関連する他の成果として、Gizatullin 教授の問題-滑らかな 4 次曲面の自己同型は器の空間である 3 次元射影空間のクレモナ変換からいつも得られるか-に否定的解決を与えた。こうして、長い間未解決であった 2 つの問題に一応の終止符をうった。

また、当該研究の初期に、正次元の部分多様体を全く有しない、2 次元以上のコンパクト複素多様体の有界導来圏上の表現不能な有限型 cohomological functor の存在を示し、代数多様体の場合との著しい違いを明らかにした。この成果は、2010 年にインド Hyderabad で開催された ICM2010 のサテライト conference の招待講演、東京大学で開催された導来圏に関する国際研究集会の招待講演で発表した。これ以外にも、ピカール数が 2 である広義カラビ・ヤウ多様体の双正則変換群・双有理変換群の構造を明らかにした研究がある。関連した研究成果は、2013 年にプサンで開催された大規模な国際研究集会 ``the

Asian Mathematical Conference 2013” での招待講演をはじめとするいくつかの国際研究集会で講演した。

以上は、(ICM2014 での講演が 2014 年度であったことを除けば) 2013 年までに得られた成果である。

当該研究におけるもう一つの大きな成果は、主に 2014 年度に行った研究-複素力学系的視点の正標数の代数幾何学への応用とそのひとつの基盤の構築-にある。正標数の K3 曲面と通常の標数零の K3 曲面の自己同型を標数零への持ち上げを通して比較するための一般的枠組を複素力学系的観点から構築した (Esnault 教授との共同研究)。また標数 3 における Artin 不変量 1 の超特異 K3 曲面に対し、いかなる幾何学的持ち上げにおいても持ち上がらない自己同型があることを示した (Esnault 教授との共同研究)。複素力学系的考え方-特に Salem 多項式-の正標数の代数幾何学への初めての応用である点が画期的であり、国内外から高く評価されている。また、このアイデアを発展整理し、Mordell-Weil 群と代数群からの考察を加味することにより、標数が 5, 7, 13 の場合を除き、Artin 不変量 1 の超特異 K3 曲面に対し、いかなる幾何学的持ち上げにおいても持ち上がらない自己同型があることを示した (Esnault 教授, Xun Yu 博士との共同研究)。これらの研究を機に正標数の代数幾何に複素力学系的視点を加味した研究も盛んになりつつある。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 21 件)

- (1) K. Oguiso, “Some aspects of explicit birational geometry inspired by complex dynamics”, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Seoul 2014 (Volume II, Invited Lectures) Vol.II (2015), 695--721.
- (2) H. Esnault, K. Oguiso, “Non-liftability of automorphism groups of a K3 surface in positive characteristic”, Mathematische Annalen, published online, March 2015, (DOI: 10.1007/s00208-015-1197-9).
- (3) F. Catanese, K. Oguiso, T. T. Truong, “Unirationality of Ueno-Campana's

- threefold", *Manuscripta Math.* 145 (2014) 399–406.
- (4) K. Oguiso, T. T. Truong, "Explicit examples of rational and Calabi-Yau threefolds with primitive automorphisms of positive entropy", Kodaira Centennial issue of the *Journal of Mathematical Sciences*, the University of Tokyo, 22 (2015) 361–385
- (5) K. Oguiso, "Automorphism groups of Calabi-Yau manifolds of Picard number two", *Journal of Algebraic Geometry* 23 (2014) 775–795.
- (6) K. Oguiso, "Quartic K3 surfaces and Cremona transformations", *Arithmetic and Geometry of K3 Surfaces and Calabi-Yau Threefolds*, *Fields Institute Communications* 67, Springer (2013) 455–460.
- (7) K. Oguiso, S. Schroerer, "Enriques manifolds", *J. Reine Angew. Math.* 661 (2011) 215–235.
- (8) K. Oguiso, "A simple remark on a flat projective morphism with a Calabi-Yau fiber", *Sci. China Math., Special Issue on Algebraic Geometry, on the occasion of Professor Doctor Fabrizio Catanese's 60th birthday* 54 (2011) 1751–1756.
- (9) K. Oguiso, "Bounded derived categories of very simple manifolds", *Sci. China Math., Special Issue on Algebraic Geometry, on the occasion of Professor Doctor Fabrizio Catanese's 60th birthday* 54 (2011) 1741–1750.
- (10) F. Campana, K. Oguiso, Th. Peternell, "Non-algebraic hyperkähler manifolds", *Journal of Differential Geometry* 85 (2010) 397–424.
- [学会発表](計 45件)
- (1) Keiji Oguiso, "Automorphisms of elliptic K3 surfaces and Salem numbers of maximal degree, The international conference "Algebraic Geometry, dedicated to Fabrizio Catanese on the occasion of his 65th birthday, March 12-14, 2015, the University of Bayreuth, Germany
- (2) Keiji Oguiso, "Automorphisms of elliptic K3 surfaces and Salem numbers of Maximal degree", *Arithmetic and Algebraic Geometry 2015, January 27-31, 2015, University of Tokyo, Tokyo, Japan.*
- (3) Keiji Oguiso, "The automorphism group of the punctual Hilbert scheme of a Cayley's K3 surface and related topics", *Complex Analysis and Geometry - A conference in honour of Professor Doctor Thomas Peternell's upcoming 60th birthday, August 21 - 23, 2014, Freiburg, Germany.*
- (4) Keiji Oguiso, "Some aspects of explicit birational geometry inspired by complex dynamics", *International Congress of Mathematicians (Seoul 2014), Invited 45 minutes talk at Section 4 Algebraic and Complex Geometry*, August 13 - 21, 2014, Coex, Seoul Korea.
- (5) Keiji Oguiso, "The automorphism group of the Hilbert scheme of length two of a Cayley's K3 surface", *ICM 2014 Satellite Conference on Algebraic and Complex Geometry, August 6 - 10, 2014, Daejeon Convention Center, Daejeon, Korea.*
- (6) Keiji Oguiso, "Some aspects of birational Calabi-Yau geometry inspired by complex dynamics" -- A Workshop in honor of 60 years of Calabi conjecture and Professor Shing-Tung Yau on the occasion of his 65th birthday, August 4-6, 2014, *Mathematical Sciences Center, Tsinghua University, Beijing, China.*
- (7) Keiji Oguiso, "Non-commutative automorphisms of hyperkähler manifolds of smaller Picard number", *Birational geometry of complex algebraic varieties – on the occasion of Professor Campana's 60-th birthday, October 7 - October 11, 2013, CIRM Luminy, France.*
- (8) Keiji Oguiso, "Smooth Quartic K3 Surfaces and Cremona Transformations", the Second Pacific Rim Mathematical Association (PRIMA) Congress, (invited forty-five minutes talk at Session 2: Algebraic and Complex Geometry), June 24-28, 2013, Shanghai Jiao Tong University,

China.

- (9) Keiji Oguiso, "Automorphism groups of Calabi-Yau manifolds of Picard number two", the Asian Mathematical Conference 2013, (invited forty-five minutes talk at Algebraic Geometry /Complex Geometry), June 30 -- July 4, 2013, Bexco, Busan, Korea.
- (10) Keiji Oguiso, "Smooth quartic K3 surfaces and cremona transformations", Higher Dimensional Algebraic Geometry, in honour of Professor Yujiro Kawamata's sixtieth birthday, January 7-11, 2013, Univ. Tokyo, Japan.
- (11) Keiji Oguiso, "Automorphism groups of Calabi-Yau manifolds of Picard number two", Algebraic and complex geometry - a conference on the occasion of Professor Doctor Klaus Hulek's 60-th birthday, September 9-13, 2012, Hannover, Germany.
- (12) Keiji Oguiso, "Birational automorphism groups of Calabi-Yau manifolds of Picard number 2", Geometry of Kähler manifolds and symplectic geometry, - an event dedicated to Professor Bogomolov's 65 anniversary, 21-25, May, 2012, Nantes, France.
- (13) Keiji Oguiso, "Entropy of automorphisms of compact hyperkaeler manifolds", Research on Complex Dynamics and Related Fields, celebrating Professor Shigehiro Ushiki's 60th birthday, 6-10 December 2010, Kyoto University, Japan.
- (14) Keiji Oguiso, "Classifications and constructions of general singular fibers of proper holomorphic Lagrangian fibrations", Perspectives on Algebraic Varieties, celebrating Professors Fabrizio Catanese, Ciro Ciliberto and Alessandro Verra on the occasion of their 60th birthday, 6-11 September 2010, Levico Terme, Trento, Italy.
- (15) Keiji Oguiso, "Bounded derived categories of very simple manifolds", ICM 2010 Satellite Conference on Complex Geometry, Group actions and Moduli spaces, 13- 16 August 2010, Hyderabad, India.

## 6 . 研究組織

### (1)研究代表者

小木曾 啓示 (OGUIISO, Keiji)  
大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：4 0 2 2 4 1 3

### (2)研究分担者

今野一宏 (KONNO, Kazuhiro)  
大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：1 0 1 8 6 8 6 9

後藤竜司 (GOTO, Ryuushi)  
大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：3 0 2 5 2 5 7 1

高橋篤史 (TAKAHASHI, Atsushi)  
大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：5 0 3 1 4 2 9 0

角 大輝 (SUMI, Hiroki)  
大阪大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：4 0 3 1 3 3 2 4

藤木 明 (FUJIKI Akira)  
大阪大学・その他部局等・名誉教授  
研究者番号：8 0 0 2 7 3 8 3

臼井 三平 (USUI Sampei)  
大阪大学・その他部局等・名誉教授  
研究者番号：9 0 1 1 7 0 0 2