

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 3 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22340010

研究課題名(和文)複体を用いたベクトル束の研究

研究課題名(英文) Study of vector bundles using the theory of complexes

研究代表者

吉岡 康太 (Yoshioka, Kota)

神戸大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：40274047

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 8,900,000円、(間接経費) 2,670,000円

研究成果の概要(和文)：K3曲面やアーベル曲面の場合にある種の条件下で、Bridgeland stable objects のモジュライを射影的に構成し、その双有理的性質を調べた。またそれらの結果をアーベル曲面上のベクトル束の分類問題に応用した。このほかには代数曲面の場合にドナルドソン不変量に関するWitten予想を解いた。

研究成果の概要(英文)：I studied moduli of Bridgeland stable objects on an abelian or a K3 surface. In particular, I proved that moduli spaces are projective varieties, and studied birational properties of the spaces. I also apply these results to the classification of vector bundles on abelian surfaces. I also proved the Witten conjecture of Donaldson invariants for algebraic surfaces.

研究分野：数学

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：ベクトル束

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 複体について: Arcara-Bertram や大川嶺の先行結果により Bridgeland stability は安定層のモジュライ空間の解析に有用であると思われる。

Fourier-Mukai 変換で Gieseker 安定性が保存されるかという問題が Bridgeland 安定性とかかわっているということは以前の研究によりわかっていた。

Bridgeland によって導入された perverse coherent sheaf と呼ばれるある種の複体は代数曲面の場合でも興味深い研究対象であることが戸田、中島、吉岡により指摘されていた。特に非特異点の爆発に付随する perverse coherent sheaf のモジュライは Donaldson 型不変量の爆発公式を与え、その帰結としてさまざまな Nekrasov 分配関数の特徴づけを与える。

(2) ゲージ理論について: Nekrasov 予想の解決により、ゲージ理論と周期積分の関係を表す Seiberg-Witten 理論を数学的に定式化することが可能となった。また望月拓郎は代数曲面の場合に Donaldson 型の不変量の一般論を構築し、その基本的性質を調べるとともに、Donaldson 不変量を 2 個のヒルベルトスキームの直積上の積分として記述した。しかもその記述には Seiberg-Witten 不変量が自然に表れ、また積分の形からある種の Nekrasov 分配関数を利用して記述できることがわかっていた。

## 2. 研究の目的

(1) Witten 予想を解決すること。Witten は Seiberg-Witten 理論の帰結として Donaldson 不変量の母関数を Seiberg-Witten 不変量を使って具体的に書き下した。数学的にこの結果を正当化することは非自明であり、これを Witten 予想という。

(2) 複体やそのモジュライ空間の研究を推し進め、既存のベクトル束に関する結果のより良い理解を目指すこと。またそれらに立脚しもっと良い結果を得ること。

(3) 代数曲面上の双有理縮約写像に付随した perverse coherent sheaf を調べること、特に有理 2 重点の特異点解消の場合に Fourier-Mukai 変換との関係を調べること。

## 3. 研究の方法

研究集会やメール等による研究連絡、パソコンを利用した数値実験、文献の購入

## 4. 研究成果

(1) 代数曲面の場合に Donaldson 不変量に関する Witten 予想を解いた。

(2) アーベル曲面やピカール数 1 の K3 曲面

の場合に、Bridgeland stable object のモジュライが不変量の異なる安定層のモジュライ空間と同型であることを示し、その結果として射影多様体であることを示した。さらにその応用としてモジュライ空間の ample cone を記述した。この結果は安定層のモジュライ空間に限っても新しい結果である。主要なアイデアは Bridgeland 安定性がフーリエ向井変換で保たれることに着目したことである。

(3) アーベル曲面の場合に、Bridgeland stable object のモジュライにより、すべての極小モデルが与えられることを示した。特にアルバネーゼ写像に対する相対的 movable cone を記述した。これらの結果によりモジュライ空間の基礎理論はほぼ自明といえるほど簡略化された。

(4) 既約 Symplectic 多様体の主要な例は、K3 曲面やアーベル曲面上の点のヒルベルトスキームは正則 Symplectic 構造をもち、Bogomolov 分解をすることにより既約 Symplectic 多様体が得られる。これらやその変形類は Beauville による既約 Symplectic 多様体の 2 系列と呼ばれる。これらの 2 系列について Nef 版の Kawamata-Morrison 予想を示した。すなわち Nef 錐の中に自己同型群に関する基本領域が finite rational polyhedral cone として取れることを示した。

(5) 以前より一般的な仮定の下で perverse 接続層のモジュライを構成し、有理 2 重点の場合に詳しく性質を調べた。特に安定性を定義する上で重要な local projective generator の基本的性質を解明し、また local projective generator の構成方法についても調べた。さらに有理 2 重点に付随する perverse coherent sheaf が K3 曲面や楕円曲面上の Fourier-Mukai 変換の理論に自然に表れることを示した。また有限群が大域的曲面に局所 symplectic に作用する場合に McKay 型対応を定式化し、その場合にも perverse coherent sheaf が現れることを示した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 10 件)

Yoshioka, Kota,  
Perverse coherent sheaves and Fourier-Mukai transforms on surfaces, II. Kyoto J. Math. 出版予定 (査読有)  
Minamide Hiroki., Yanagida, Shintarou, Yoshioka, Kota,

Some moduli spaces of Bridgeland's stability conditions, International Mathematics Research Notices, rnt126, 64 pages. doi:10.1093/imrn/rnt126. (査読有),

to appear

Yanagida, Shintarou, Yoshioka, Kota,  
Bridgeland's stabilities on abelian  
surfaces, arXiv:1203.0884, Math. Z., 276  
(2014), 571--610 (査読有)

DOI:10.1007/s00209-013-1214-1

Yanagida, Shintarou, Yoshioka, Kota,  
Semi-homogeneous sheaves, Fourier-Mukai  
transforms and moduli of stable sheaves on  
abelian surfaces, J. Reine und Angew. Math.  
684 (2013) 31--86

DOI: 10.1515/crelle-2011-0010 (査読有)

Yoshioka, Kota,

Perverse coherent sheaves and Fourier-  
Mukai transforms on surfaces, I. Kyoto J.  
Math. 53 (2013), no. 2, 261-344.

DOI 10.1215/21562261-2081234, (査読有)

Inaba, Michiaki, Saito, Masa-Hiko,

Moduli of unramified irregular singular  
parabolic connections on a smooth  
projective curve. Kyoto J. Math. 53  
(2013), no. 2, 433-482,

DOI 10.1215/21562261-2081261, (査読有)

Awata, Hidetoshi, Fuji, Hiroyuki,  
Kanno, Hiroaki, Manabe, Masahide, Yamada,  
Yasuhiko,

Localization with a surface operator,  
irregular conformal blocks and open  
topological string.

Adv. Theor. Math. Phys. 16 (2012), no.  
3, 725-804.

(査読有)

Nakajima, Hiraku, Yoshioka, Kota,

Perverse coherent sheaves on blowup, III:  
Blow-up formula from wall-crossing. Kyoto  
J. Math. 51 (2011), no. 2, 263-335.

DOI 10.1215/21562261-1214366, (査読有)

Goettsche,Lothar, Nakajima, Hiraku,  
Yoshioka, Kota,

Donaldson = Seiberg-Witten from  
Mochizuki's formula and instanton  
counting. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 47  
(2011), no. 1, 307-359. (査読有)

Kimura, Masanori, Yoshioka, Kota,  
Birational maps of moduli spaces of vector  
bundles on K3 surfaces. Tokyo J. Math.  
34 (2011), no. 2, 473-491. (査読有)

[学会発表](計 4 件)

吉岡康太

Bridgeland stability and stable sheaves on  
abelian surfaces, The 6th MSJ-SI --  
Development of Moduli Theory,  
2013年6月17日 6月21日  
京都大学数理解析研究所

吉岡康太

Bridgeland stability conditions and

Fourier-Mukai transforms, Moduli spaces  
closing conference. 2011年6月27日—7月  
1日 Newton Institute 英国.

吉岡康太

代数曲面の Donaldson 不変量について、幾  
何学シンポジウム. 2010年8月7日. 神戸大  
学理学研究科.

中島啓

Instanton counting and Donaldson  
invariants, Hardy Lectures, 2010年7月2  
日 London.

[図書](計 件)

[産業財産権]  
出願状況(計 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]  
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者

吉岡康太 (Yoshioka, Kota)

研究者番号: 40274047

(2)研究分担者

( )

研究者番号:

(3)連携研究者

野海正俊 (Noumi, Masatoshi)

研究者番号: 80164672

山田泰彦 (Yamada, Yasuhiko)

研究者番号: 00202383

齋藤 政彦 (Saito, Masahiko)

研究者番号：80183044

中島啓 (Nakajima, Hiraku)

研究者番号：00201666

阿部健 (Abe, Takeshi)

研究者番号：90362409