

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22340011

研究課題名(和文)非線形現象に現れる幾何学的特異点の研究

研究課題名(英文)A research on the geometric singularities of non-linear phenomena

研究代表者

泉屋 周一 (IZUMIYA, Shyuichi)

北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：80127422

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,700,000円、(間接経費) 3,810,000円

研究成果の概要(和文)：ローレンツ空間形内の空間的部分多様体に対して、「光錐ガウス写像」を導入し光的曲率と言う不変量を構成した。その不変量を用いて、空間的部分多様体に沿った「光的超曲面」の特異点の記述をルジャンドル特異点論を応用することにより行った。さらに、相対性理論やブレーン宇宙論で重要な「世界面」に対して「焦点集合」を記述する幾何学的枠組みを構成し、「グラフ型ルジャンドル開折」の理論を用いて「波面の伝播」との関係性を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：In this research project we constructed the notion of 'lightlike curvature' for spacelike submanifolds of Lorentzian space forms by using the notion of 'lightcone Gauss maps'. As an application of the theory of Legendrian singularities, we described the singularities of the lightlike hypersurface along a spacelike submanifold. Moreover, we constructed a geometric framework to describe the caustics of world sheets which is an important notion in the theory of general relativity and the brane world scenario. We clarified the relation of the caustics and the wave front propagations by using the theory of graph-like Legendrian unfoldings.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：特異点 非線形現象 相対性理論 ローレンツ空間形 ルジャンドル特異点 ラグランジュ特異点

1. 研究開始当初の背景

現代幾何学の主要な分野として、位相幾何学、微分幾何学、代数幾何学があるが特異点論はこれらすべての幾何学を故郷としている。例えば、モース理論、はめ込みと埋め込みの理論、広中の特異点解消理論等であるが、それらは現代においては様々な応用へと昇華されつつある。また、20世紀前半までは、幾何学は主として非特異的な対象を研究してきたが、特異点論の発展により、特異点を許容する対象をもその研究対象として含みつつある。また、人類は古来より、特異的な現象に注目して来たと言える、特に20世紀終盤から、古典的微分幾何学への特異点論の応用と100年経った相対性理論への応用、衝撃波の解析、画像処理理論への応用などが、ようやく可能な段階に到達してきたのが、研究開始当初の背景である。

2. 研究の目的

当研究は特異点論の中でも「微分可能写像の特異点論」を応用することにより、部分多様体の微分幾何学、変分問題に現れる特異点、非線形偏微分方程式系の解の衝撃波、経済学のランキング問題と超平面配置、微分式系、プレーン宇宙論に現れる特異点等の具体的分野やそれまでに知られていた分野以外への応用可能性についての探究や新たな分野への応用を目指して、既存の特異点論の成果を応用すると同時に、特異点論自体の基礎的部分の深化発展を目的とした。

3. 研究の方法

具体的には、分担者や連携研究者を大まかに以下の3つのグループに分けて研究を推進した。(a) 微分幾何学、シンプレクティック幾何学や偏微分方程式の幾何学的理論において問題の発掘と理論の整備を行うグループ:(小野、梅原)。(b) 偏微分方程式論の解析的側面の整備と映像理論や結晶成長の理論における偏微分方程式の解に特異点が出現する状況を幾何学的測度論や解析的方法により研究するグループ:(利根川、小池)。(c) 他のグループで整備された概念、道具を特異点論の立場から見直し、応用が可能なものは応用し、問題点を整備しそれを他のグループへフィードバックするグループ:(泉屋、石川、寺尾、大本)。これらの役割分担の下で、各グループで得られた問題点や結果を分担者会議や個別の研究打ち合わせなどを通して、研究を推進した。各年度ごとにそれまでに得られた、問題点や新たな現象にたいして、上の研究分担に沿って、具体的な目標をたてて、成立する諸定理などの目標を決め具体的に証明を試みた。この結果は、関連する国内外での研究集会で成果発表を行い更なる発展のために、研究討論を行った。また、に毎年度ごと目標となる幾何学的現象や偏微分方程式の種類を定めることも平行して行った。

理論系の分野である数学の主たる研究方法は、実際の面談による、研究打ち合わせである。この場合、研究打ち合わせと言っても、準備のた

めの打ち合わせではなく、実際に踏み込んだ計算や証明が行われるために、一回の訪問や招聘が最低1週間~3週間に及ぶ。そのために、決算では、全体的に旅費の占める率が高くなっている。これらの方法を実施するために、連携研究者のみならず国内外の専門家の招聘や訪問が主となった。

4. 研究成果

初年度の成果として、ローレンツ多様体のもっとも単純な場合で、特殊相対性理論の舞台である一般次元のミンコフスキー時空内の空間的部分多様体の不変量の構成とその幾何学的意味付けの研究を推進した。以前からの代表者の研究で、ミンコフスキー時空内の空間的部分多様体で余次元2の場合がユークリッド空間内の超曲面の理論に対応することが理解されてきたので、今回は、余次元が3以上の場合にどのように基礎理論を構成すべきかについての研究を行った。そのために、余次元2の空間的管状部分多様体と言う概念を新たに導入することにより、代表者の先行研究である余次元2の空間的部分多様体の成果を応用することにより、新たな、不変量の構成に成功した。その結果、従来の研究で得られている、双曲空間内、ド・ジッター空間内、ユークリッド空間内、球面内の部分多様体の研究をこの観点から統一的に扱うことが可能となった。その後、この成果をもとに、ミンコフスキー空間内の空間的部分多様体に対して、「光的絶対全曲率」の概念が定義可能となり、その値の下からの評価式を与えた。この評価式は、ユークリッド空間内の部分多様体に対して、従来より知られていたチャーン・ラーショフの不等式をミンコフスキー空間内の空間的部分多様体に対して一般化するばかりではなく、代表者によるホロ球面的絶対全曲率の下からの評価の一般化ともなっていることが解った。この評価式が最小となる場合の空間的部分多様体として「光的タイト空間的部分多様体」と言う概念を新たに導入し、その幾何学的特徴付けを与えた。この光的タイトと言う概念については、今後の詳しい研究発展が期待される。一方、相対性理論では、等時性と言う概念がなくなるために、考えるべき幾何学的対象は単独の空間的部分多様体ではなく、その1径数族として得られる「世界面」を考える必要がある。単独の空間的部分多様体から発せられる光は全体として、「光的超曲面」を構成し、それを記述する枠組みが23年度までの研究で構成されたが、「世界面」について、理論物理学者が提唱している、「焦点集合」を記述する枠組みとして、「グラフ型ルジャンドル開折の理論」が当てはまることを発見した。この理論は、ユークリッド空間内の超曲面の平行超曲面族や完全積分可能1階ホロノミック偏微分方程式系の解の特異点を記述するために、代表者が従来の研究で構成したものであるが、今回、「世界面」の「焦

点集合」を記述する枠組みとして、応用可能であることがわかった。さらに、その研究過程で、グラフ型ルジャンドル特異点論とラグランジュ特異点論との関係を明らかにすることもでき、この理論の応用範囲を大きく広げる事が可能となった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 9件)

Shyuichi Izumiya and Takami Sato, Lightlike hypersurfaces along spacelike submanifolds in Minkowski space-time, Journal of Geometry and Physics, 査読有, 71 2013, 30-52 DOI:10.1016/j.geomphys.2013.03.005

Shyuichi Izumiya, Yang Jiang and Takami Sato, Lightcone dualities for curves in the lightcone unit 3-sphere, Journal of Mathematical Physics, 査読有, 54, 2013, 063511 DOI: 10.1063/1.4811451

S. Cappel, L. Maxim, T. Ohmoto, J. Schürmann and S. Yokura, Characteristic classes of Hilbert schemes of points via symmetric products, Geometry & Topology, 査読有, 17 2013, 1165-1198, DOI:10.2140/gt.2013.17.1165

Shyuichi Izumiya and Masatomo Takahashi, Pedal foliations and Gauss maps of hypersurfaces in Euclidean space, Journal of Singularities, 査読有, 6, 2012, 84-97, DOI: 10.5427/jsing.2012.6g
Goo Ishikawa, Singularities of tangent varieties to curves and surfaces, Journal of Singularities, 査読有, 6, 2012, 54-83, DOI: 10.5427/jsing.2012.6f

Chun Liu, Yoshihiro Tonegawa and Norifumi Sato, Two-phase flow problem coupled with mean curvature flow, Interfaces Free Bound., 査読有, 14, 2012, 185-203, DOI:10.4171/IFB/279

Marcelo Buosi, Shyuichi Izumiya and Maria Aparecida Soares Ruas, Horo-tight spheres in hyperbolic space, Geometriae Dedicata, 査読有, 154, 2011, 9-26, DOI: 10.1007/s10711-010-9565-9

H.Kamiya, A.Takemura and H.Terao, Periodicity of non-central integral arrangements modulo positive integers, Annals of Combinatorics, 査読有, 15, 2011, 449-464, DOI:

10.1007/s00026-011-0105-6
S.Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, Horospherical flat surfaces in Hyperbolic 3-space, Journal of Mathematical Society of Japan, 査読有, 62, 2010, 789-849, DOI: 10.2969/jmsj/06230789

[学会発表](計 4件)

Shyuichi Izumiya, Caustics of world sheets in anti-de Sitter space, Singularities in geometry and applications III Edinburgh (Scotland), 2 Sep 2013

Shyuichi Izumiya, Total lightcone curvatures of spacelike submanifolds in Lorentz-Minkowski space, The International Conference of Differential Geometry and Dynamical Systems Balkan Society of Geometers, Mangalia (Romania) 29 August 2012

Shyuichi Izumiya, The lightlike geometry of spacelike submanifolds in Lorentz-Minkowski space, Bruce 60 & Wall 75, Workshop in Singularity Theory, its Applications and Future Prospects, Liverpool (UK), 28, June 2012
泉屋周一, ローレンツ・ミンコフスキー空間内の空間的部分多様体の光的幾何学, 特異点論と幾何構造(長野市), 2012年5月30日

[図書](計 0件)

[産業財産権]

出願状況(計 0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]

ホームページ等

<http://researchmap.jp/izumiya/>

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

泉屋 周一 (IZUMIYA Shyuichi)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：80127422

(2) 研究分担者

石川 剛郎 (ISHIKAWA Goo)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：50176161

寺尾 宏明 (TERAO Hiroaki)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：90119058

利根川 吉廣 (TONEGAWA Yoshihiro)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：80296748

大本 亨 (OHMOTO Toru)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：20264400

(3) 連携研究者

小野 薫 (ONO Kaoru)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：20204232

梅原 雅顕 (UMEHARA Masaaki)
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：90193945

小池 茂昭 (KOIKE Shigeaki)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：90205295