

平成 26 年 5 月 30 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22340014

研究課題名(和文)位相的複雑さとL-S理論

研究課題名(英文)Topological complexity and L-S theory

研究代表者

岩瀬 則夫 (IWASE, NORIO)

九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：60213287

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 5,400,000円、(間接経費) 1,620,000円

研究成果の概要(和文)：酒井及び岩瀬により，1) 空間 X が $\text{cat}(X) \leq k$ のとき， X が H 空間であるには C_k 空間であることが必要十分であり，基点を除き高々三つの胞体しか持たない C_1 空間は H 空間である．2) 単位位相的複雑さと位相的複雑さの差は高々1である．3) 回転群のL-Sカテゴリは $n \geq 10$ でカップ積長に一致する．4) $\text{cat}(X) \leq 1$ となるには，各素数で1以下であることが必要十分である．さらに角らは5) 有限群 G の $H_1(G)$ が2-群でないとき， G がギャップ群になる為の必要十分条件を与え，6) Laitinen 予想を $\text{Aut}(A_6)$ を除く有限非可解群に対して証明した．

研究成果の概要(英文)：Sakai and Iwase showed the following. 1) A space X with $\text{cat}(X) \leq k$ is an H -space if and only if X is a C_k space. Moreover, a C_1 space with at most three cells other than the base point is an H -space. 2) A monoidal topological complexity differs from the original topological complexity at most by 1. 3) The L-S category of a rotation group coincides with its cup-length. 4) L-S category is less than or equal to 1 if and only if p -localized version of L-S category has the same property for every prime p , where we do not need to assume that the space is simply-connected. Further Sumi et al. gave 5) a necessary and sufficient condition for a finite group G to be a gap group, unless the first homology group $H_1(G)$ is a 2-group and showed 6) The Laitinen conjecture is true for any finite non-solvable groups except for $\text{Aut}(A_6)$.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相的複雑さ 単位位相的複雑さ L-S カテゴリ ホップ不変量 fibrewise 理論 C_k -空間 ギャップ群 Laitinen 予想

1. 研究開始当初の背景

配置空間 B の複雑さを測る不変量として、位相的複雑さ (Topological Complexity) $TC(B)$ は、ファイバー空間 $\pi : P(B) \rightarrow B \times B$ のホモトピー不変量として与えられ、以下の条件を満たす最小の自然数 $m \geq 1$ (もし無ければ $m = 0$ とする) である: 空間 $B \times B$ の m 個の開集合からなる族が $B \times B$ を覆い、各々の開集合上で π の section が存在する.

実はこの位相的複雑さがある意味で fibrewise な L-S 理論と見なすことができる. 酒井道宏氏との共同研究により発見されている. ここで「ある意味で」としたのは, James らによって与えられた本来の fibrewise な L-S の猫より形式上では弱い形の定義により与えられることが分かったからである. この論文は、位相的複雑さの上からの評価を与える fibrewise な意味での錐構成 (cone-length) や猫的な空間列などの不変量や、下からの強力な不変量である加群重み (module weight), あるいはこれらの計算に使用されるホップ不変量を与えることから、発表直後から引用されるなどの反響を呼ぶものであった. 逆に、本来の James による fibrewise な L-S の猫に対応するものが単位位相的複雑さ (monoidal topological complexity) であることを同時に報告している. この単位位相的複雑さは、実は fibrewise ホモトピー不変量であって、ホモトピー不変量ではないのであるが、むしろ理論的には扱いやすいという注目すべき性質を持つ.

一方で位相空間の「複雑さ」を測る不変量として古くから知られ、その値を決定する為の努力が長年続けられて来たものとして、Lusternik と Schnirelmann が導入した numerical なホモトピー不変量である L-S の猫 $cat(M)$ (L-S category) がある. L-S の猫は元々可微分 (閉) 多様体 M 上で定義された実数値可微分関数の critical points の個数の最小値 $Crit(M)$ を下から評価するホモトピー不変量として与えられ、さらに最近では Arnold 予想との強い関連が指摘されると、Conley, Floer, 深谷, Hofer, Le, 小野, Rudyak, Zehnder 等によって研究がなされ、ホモトピー論の枠に留まらない影響をトポロジーに与えている. さらにまた、葉層構造 (foliation) の複雑さを与える指標として L-S の猫の変種が定義され、Coleman, Vogt らにより研究されている.

また L-S の猫はホモトピー不変量であるという性質から、L-S の猫の決定にはホモトピー論的な様々な手法が生み出されており、特に、申請者による高次 Hopf 不変量の導入があり、申請者はこの不変量を用いてトポロジーの世界で古くからの問題であった Ganea 予想の成立する為の条件を与え、さらにこれを用いて一般の場合の否定的な解決を与えた. この高次 Hopf 不変量は L-S の猫に対して上からの評価を与えることに

特に有効であったことを指摘しておきたい. あるいはまた、Fadell と Husseini による猫的重み (category weight) をホモトピー論的に取り扱いやすい形に Rudyak, Strom らが改めた猫的重みがあり、特に Rudyak はこの不変量を用いて次元が低い多様体に対する Ganea 予想の肯定的な解決を与え、さらに $\pi_2 = 0$ などの場合に Arnold 予想の証明を与えた. ただし、Ganea 予想が成立しない複体や多様体は存在し、この事実は高次の非安定 Hopf 不変量が安定化する過程で消えてしまうという事実を用いて筆者が構成したものである. さらに筆者と京都大学の河野氏により、ループ空間の A_1 -構造に付随する射影空間を用いた形式を採用することでこの不変量は改良され、加群重みというより強い不変量が導入されており、実際に $Spin(9)$ の L-S の猫の値は加群重みを用いて決定された. これら、猫的重みや加群重みは高次 Hopf 不変量とは対照的に、L-S の猫に対して下からの評価を与える不変量であった. これらの不変量を用いて、筆者らもその一部に貢献しながら、Lie 群を始めより多くの空間の L-S の猫の決定がなされている.

配置空間の位相的複雑さを下から評価する不変量としては Farber によるカップ積長 (cup-length) の変種である零因子カップ積長 (zero-divisors cup-length) $Z_{R}(B)$ と共に、Farber-Grant による Rudyak 版の猫的重みの変種である TC -重み $wgt_{\pi}(-;R)$ が零因子イデアル $I_{R} = \ker \Delta_{\square} : H^{\square}(B \times B, R) \rightarrow H^{\square}(B; R)$ を用いて次のように定義される:

1. (Farber) $Z_{R}(B) = \text{Max}\{ m \geq 0 \mid H^{*}(B \times B, R) \cap I_{R}^m = 0 \}$
2. (Farber-Grant) $wgt_{\pi}(u; R) = \text{Max}\{ m \geq 0 \mid f^*Y \subset B \times B, \text{secat}(f \circ \pi) < m, f^{\square}(u) = 0 \}$

これらを凌駕する不変量として、L-S の猫に対して京都大学の河野明氏との共同研究で提出した加群重みに対するこの枠組みでの変種を与えたい. 同様に、L-S 理論において上からの評価に有効であった錐構成分解 (cone-decomposition) の手法は、位相的複雑さに対して有力な手段とならないことが知られている.

また空間対 (X, A) に対する L-S の猫は本来の L-S の猫の解析において重要な情報を与えるものであるが、Berstein-Ganea, Fadell-Husseini, Arkowitz-Lupton により三つの不変量が独立に与えられていた. 筆者はこれらの間の関係を明らかにすると共に新しい関係式を与えている.

2. 研究の目的

位相的複雑さに対して、L-S 理論との関係を明らかにし、一方で錐構成分解に代わって上からの評価を与える不変量を新たに導入し、位相的複雑さの持つ位相的性質の決定に対し新しいインパクトを与え、他方で L-S

理論で有用であった加群重みの導入を行う。もちろん、可能ならばこれらを用いてループ空間のホモトピー可換性をもたらす T_k 構造や C_k 構造を持つ空間などの空間の位相的複雑さを決定するのが目標である。

L-S の猫については、まず「錐構成分解」を改良して「猫的な空間列」を得る方法を確立する。さらにこれを加群重みと共に駆使して、様々な空間に対する L-S の猫の値、例えば、可能ならば $SO(n)$ や $co-H$ 空間の L-S の猫の決定に寄与する。

3. 研究の方法

ロボット動作設計の位相的複雑さと単位位相的複雑さの関係を fibrewise な L-S 理論との関連の中で明らかにする。これは「もし最初と最後の状態が同じなら、その状態遷移は静止したものである」という仮定を付すことで得られる「動作設計」である。ロボットの動作の効率の面からも、むしろ Farber による元々の定義による位相的複雑さよりも現実に即した不変量ではないかと考えている。さらに、これらの位相的複雑さと、James の導入した fibrewise な L-S の猫との比較を行い、両者に対して上からの評価や下からの評価として与えられている不変量の関係を明らかにする。これによって、謎に包まれていた位相的複雑さという不変量をホモトピー論的により良く理解する。

また一方で fibrewise な L-S 理論は自由ループ空間の分類空間とも強い結び付きを持つ。これを分類空間を用いて記述することで、ループ空間の可換性との関連を調べる。

4. 研究成果

まず、Jiang 群あるいは Gottlieb 群として知られるホモトピー群の部分群は Hopf 構造あるいはそのホモトピー可換性との関係も深く、古くから多くの観点から研究がなされてきた。しかしこの群を L-S の猫の観点から捉えると、その定義は L-S の猫に対する様々な議論とは必ずしもうまく適合せず、むしろ類似する一般 Whitehead 積の概念を包含する形で定式化するのが自然であることが分かる。本研究ではこの新しい定義に基づく概念を Gottlieb 群とは別に C_k 構造と呼ぶ。それはこの概念が一方で Hopf 構造のホモトピー可換性 (homotopy comutativity) と密接に関係することを強調するものである。さらにその性質を関連する概念である Aguadé の T-space などと比較し、それらの関係を調べ、さらに様々なホモトピー論的観点からその本来の意味を調べ、さらにこれらの性質を用いることで、実射影空間を含むレンズ空間やセルの個数が少ない空間についてこれを完全に決定し、さらに C_k 構造を持たない空間などを具体的に記述した。

次に、弱い形の fibrewise な L-S の猫と本来の James による fibrewise な L-S の

猫との同値性の証明にはギャップが存在することが指摘された。これに対しては、多くの特殊な状況で両者が等しいことを証明することに成功したが、一般的な形では証明を持たない「予想」であるということになった。これに続く研究で、これらの差異が最大でも 1 であることを証明し、初期の論文に含まれていた細かなミスプリを全て訂正したものを訂正論文として再提出した。この事実から、例えばロボットの動作に伴うエネルギー損失を考慮した安全性を重視する立場に立てば、応用上は両者の差が無視し得るほど小さいと言っても過言では無いかもしれないと考えるようになった。また、Hopf 空間に対する位相的複雑さが L-S の猫と一致し、これによって Lie 群の L-S の猫に対するこれまでの結果が位相的複雑さに対する結果として翻訳できることが明らかになった。

次に、特殊直交群 $SO(n)$ の L-S の猫は $n \leq 9$ までが決定されている： $n \leq 5$ は James により知られ、それ以降は三村・西本の両氏との共同研究により得られたものであり、いずれの値も結果的にはカップ積長と一致している。今年度の長期出張においてヨーロッパの専門家との議論を経て、宮内・菊池の両氏とともに 6 年前までに書きかけながらそのままにしていた論文原稿の主たる命題の証明に対して、最後の、そして最も重要な piece を埋めることができ、これを用いて $SO(10)$ の L-S の猫がそのカップ積長に一致することが示された。今回問題とした $SO(10)$ は、その普遍被覆 $Spin(10)$ が primitively generated でない初めての Spin 群となるものであり、この結果を踏まえれば、特殊直交群 $SO(n)$ の L-S カテゴリ数がそのカップ積長に一致すると予想することにも、相応の理由があると考えて良いだろう。

さらに、スペインの Costoya 氏との共同研究で L-S カテゴリ数が 1 以下となる為の必要十分条件を各々の素数に於ける局所化の概念を用いて表現することに成功した。この結果は、その双対である A. Zabrodsky の mixing homotopy types の理論とは全く異質の難しさを内包し、有理ホモトピー論のアイデアを基礎に用いる証明で示された。

一方、角らは有限群 G の 1 次元ホモロジー群 $H_1(G)$ が 2-群でないときに、 G がギャップ群になる為の必要十分条件を正しく与え、さらに Laitinen 予想が $Aut(A_6)$ を除く有限非可解群に対して正しいことを証明した。これらのホモトピー球面への作用から得られる等質空間については、その L-S の猫は次元に等しいことが予想される。

最後に、fibrewise なホモトピー不変量はそれ自体がホモトピー不変量ではなく、当初考えていたよりはるかにその取り扱いは難しく、例えば不変量の計算の為に導入すべき、空間対に対する相対的な位相的複雑さには手が付けられなかったのは残念である。し

かし、今回採用された科学研究費補助金プログラムにおいて、今後の研究の発展の為に土台が築けたと自負している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計16件)

M. Sakai; “A higher Hopf invariant in the category of fibrewise spaces”, 査読有, 久留米高専紀要, 2 (2011), 77-80.

D. Kishimoto, A. Kono, T. Nagao; “Commutativity of localized self-homotopy groups of symplectic groups”, 査読有, Topology Appl. 158 (2011), 1025-1032.

F. Morishita, O. Saeki; “Height functions on surfaces with three critical values”, 査読有, J. Math. Soc. Japan 63 (2011), 153-162.

D. Tamaki; “On the homology of configuration spaces associated to centers of mass”, 査読有, Arrangements of hyperplanes—Sapporo 2009, 417-457, Adv. Stud. Pure Math., 62, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2012.

N. Iwase, M. Mimura, N. Oda, Y. S. Yoon; “The Milnor-Stasheff filtration on spaces and generalized cyclic maps”, 査読有, Canadian Mathematical Bulletin 55 (2012), 523-536.

N. Iwase, M. Sakai; “Erratum to “Topological Complexity is a Fibrewise L-S Category”, 査読有, Topology and its application 159 (2012), 2810-2813.

K. Pawalowski and T. Sumi; “The Laitinen conjecture for finite non-solvable groups”, 査読有, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 56 (2012), 303-336.

Y. Kamiyama, K. Kimoto; “The height of a class in the cohomology ring of polygon spaces”, 査読有, Int. J. Math. Math. Sci. 2013, Art. ID 305926, 7 pp.

T. Sumi, Mitsuhiro Miyazaki and T. Sakata; “Typical ranks for $m \times n \times (m-1)n$ tensors with $m \leq n$ ”, 査読有, Linear Algebra and its Applications 438 (2013), 953-958.

T. Sakata, K. Maehara, T. Sasaki, T. Sumi, Mitsuhiro Miyazaki, Yoshitaka Watanabe,

and Makoto Tagami; “Tests of inequivalence among absolutely nonsingular tensors through geometric invariants”, 査読有, Universal Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 1 (2012), 1-28.

T. Sumi; “The gap hypothesis for finite groups which have an abelian quotient group not of order a power of 2”, 査読有, Journal of the Mathematical Society of Japan 64 (2012), 91-106.

T. Sumi and T. Sakata; “Connectivity for $3 \times 3 \times K$ contingency tables”, 査読有, Journal of Algebraic Statistics 2 (2012), 54-74.

A. Kono, S. Theriault; “The order of the commutator on $SU(3)$ and an application to gauge groups”, 査読有, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 20 (2013), 359-370.

T. Sumi; “Tangential representations on a sphere”, 査読有, RIMS 研究集会「変換群のトポロジーとその周辺」報告集 1876 (2014), 127-135.

N. Iwase, C. R. Costoya; “Co-H-Spaces and almost localization”, 査読有, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, (to appear)

T. Sumi; “Centralizers of gap groups”, 査読有, Fundamenta Mathematicae, (to appear)

[学会発表](計34件)

N. Iwase; “The \mathbb{S}^1 -local Ganea Conjecture”, International Conference on Algebraic and Geometric Topology, 2010年06月 (Capital Normal University, P. R. China)

N. Iwase; “Topological Complexity is a fibrewise L-S category”, International Conference Japan-Mexico on Topology and its Applications, 2010年09月 (Universidad de Colima, Mexico)

岩瀬則夫; “位相的複雑さと L-S カテゴリー”, 京都大学理学部談話会, 2010年12月 (京都大学, 京都市)

N. Iwase; “Topological complexity and L-S category”, 応用トポロジー: 情報通信・生命科学との連携を目指して (招待講演), 2011年9月1日 (JR 博多シティー)

岩瀬則夫; “Internal A_1 category and

its realization”, 福岡ホモトピー論セミナー, 2012年1月7日(福岡大学セミナーハウス)

N. Iwase; “Topological complexity and L-S category”, Seminar at Universidad de Santiago de Compostela (招待講演), 2012年2月16日(Universidad de Santiago de Compostela, Spain)

N. Iwase; “On the equivariant systolic category”, New Insights in Lusternik Schnirelmann category (招待講演), 2012年2月17日(Hostal de los Reyes Catolicos, in Plaza del Obradoiro, Spain)

N. Iwase; “ A_n category and its realization”, Seminar at Universitat Autònoma de Barcelona (招待講演), 2012年2月24日(Universitat Autònoma de Barcelona, Spain)

角俊雄; “Nonsolvable groups of which the Smith sets are groups”, 第38回変換群論シンポジウム, 2011年11月18日(兵庫県兵庫県民会館)

角俊雄, 坂田年男, 宮崎充弘; “Existence and construction of absolutely nonsingular tensors”, 第28回代数的組合せ論シンポジウム, 2011年06月21日(大分大学)

角俊雄; “Restricted action to cyclic groups on modules”, RIMS 研究集会「変換群の幾何と組合せ論」, 2011年06月16日(京都大学数理解析研究所)

酒井道宏; “高次 Hopf 不変量の拡張について”, 日本数学会九州支部例会, 2012年2月11日(九州工業大学)

岩瀬則夫; “ A_n structures on spaces and coalgebras”, 東京都市大学数理学セミナー, 2012年05月26日~2012年05月26日(東京都市大学)

岩瀬則夫; “ A_n structures on spaces and coalgebras”, 九州大学トポロジー金曜セミナー, 2012年07月20日(九州大学)

N. Iwase; “On the equivariant systolic category”, 6th European Congress of Mathematics (招待講演), 2012年09月03日~2012年09月03日(Krakov, Poland)

N. Iwase; “Associahedra, Multiplihedra and units in A_n form”, Topology Seminar, Universidade de Santiago de Compostela (招待講演), 2012年11月27日~2012年11月27

日(Santiago de Compostela, Spain)

N. Iwase; “Associahedra, Multiplihedra and units in A_n form”, Topology Seminar, Universitat Autònoma de Barcelona, (招待講演), 2012年11月30日~2012年11月30日(Barcelona, Spain)

N. Iwase; “Associahedra, Multiplihedra and units in A_n form”, Topology Seminar, Universidad de Malaga (招待講演), 2012年12月05日~2012年12月05日(Malaga, Spain)

N. Iwase; “How trees make a shadow in the lattice”, Topology Seminar, University of Southampton (招待講演), 2012年12月11日~2012年12月11日(Southampton, United Kingdom)

N. Iwase; “Associahedra, Multiplihedra and units in A_n form”, Topology Seminar, University of Aberdeen, 2012年12月20日~2012年12月20日(Aberdeen, United Kingdom)

N. Iwase; “ A_n structures on coalgebras”, Topology Seminar, University of Glasgow (招待講演), 2013年01月07日~2013年01月07日(Glasgow, United Kingdom)

N. Iwase; “Associahedra, Multiplihedra and units in A_n form”, Discrete Geometry and Dynamical Systems (招待講演), 2013年01月22日~2013年01月22日(京都大学)

T. Sumi; “The Smith equivalent problem for Oliver groups”, Conference on Algebraic and Geometric Topology, 2012年09月08日~2012年09月08日(instytut matematyki uniwersytetu gdanskiego, Poland)

T. Sumi; “The Smith equivalent problem and Smith sets of Oliver groups”, 日本数学会、トポロジー分科会(招待講演), 2012年09月18日~2012年09月18日(九州大学)

T. Sumi; “Rank of high dimensional arrays”, Symposium: Structures and Symmetries on Manifolds, 2013年03月12日~2013年03月12日(沖縄県青年会館, 那覇市)

岩瀬則夫; “Bearded Trees の言語と A_n 構造の単位元”, トポロジーシンポジウム(招待講演), 2013年08月08日~2013年08月08日(大阪市立大学)

N. Iwase; “Associahedra, Multiplihedra and units in A_n form”, International Conference on Topology and Geometry 2013

Joint with the 6th Japan-Mexico Topology Symposium, 2013年09月06日~2013年09月06日(島根大学)

N. Iwase; "On Lusternik-Schnirelmann category of $S^0(10)$ ", ホモトピー論シンポジウム, 2013年10月03日~2013年10月03日(岡山大学)

N. Iwase; "Associahedra, Multiplihedra and units in A_∞ form", 5th East Asian Conference of Algebraic Topology (招待講演), 2013年12月06日~2013年12月06日(Chinese Academy of Sciences, Beijing, China)

N. Iwase; "A new definition of differential forms in diffeological spaces", Diffeology in Karatsu, 2013年12月21日~2013年12月21日(唐津市市民プラザ)

岩瀬 則夫; "A new definition of differential forms in diffeological spaces --- 同変 de Rham 理論を目指して", 不動点定理とその周辺, 2014年03月09日~2014年03月10日(奈良女子大学理学部)

角俊雄; "Tangential representations on a sphere", RIMS 研究集会「変換群のトポロジーとその周辺」, 2013年05月23日~2013年05月23日(京都大学数理解析研究所)

T. Sumi; "Rank of tensors with size $2 \times \dots \times 2$ ", International Workshop "Computational Algebraic Statistics, Theories and Applications (CASTA 2014)", 2014年01月21日~2014年01月24日(Kyoto Terrsa, Kyoto)

角俊雄; "Nonsingular bilinear maps and plural typical ranks", 不動点定理とその周辺(招待講演), 2014年03月09日~2014年03月10日(奈良女子大学理学部)

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等
<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~iwase/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岩瀬 則夫 (IWASE NORIO)
九州大学 数理学研究院 教授
研究者番号: 60213287

(2) 研究分担者

角 俊雄 (SUMI TOSHIO)
九州大学 基幹教育院 准教授
研究者番号: 50258513

酒井 道宏 (SAKAI MICHIIHIRO)
久留米工業高等専門学校 准教授
研究者番号: 90353276

(3) 連携研究者

河野 明 (KONO AKIRA)
同志社大学 理学部 教授
研究者番号: 00093237

佐伯 修 (SAEKI OSAMU)
九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所 教授
研究者番号: 30201510

神山 靖彦 (KAMIYAMA YASUHIKO)
琉球大学 理学部 教授
研究者番号: 10244287

玉木 大 (TAMAKI DAI)
信州大学 理学部 教授
研究者番号: 10252058

佃 修一 (TSUKUDA SHUICHI)
琉球大学 理学部 准教授
研究者番号: 50305182

岸本 大祐 (KISHIMOTO DAISUKE)
京都大学 理学研究科 准教授
研究者番号: 30201510