様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 26 年　 6 月　 3 日現在

機関番号：12601
研究種目：基盤研究(B)
研究期間：2010～2013
課題番号：22340026
研究課題名（和文）極小表現の大域解析と無限次元表現の分岐則

研究課題名（英文）Analysis of minimal representations and branching laws of infinite-dimensional representations

研究代表者
小林　俊行（Kobayashi, Toshiyuki）

東京大学・数理（科）学研究科（研究院）・教授

研究者番号：80201490

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　12,700,000円、（間接経費）　3,810,000円

研究成果の概要（和文）：単純リー群の極小表現は,分解・誘導という観点において最も根源的なユニタリ表現の１つである．研究代表者は、表現論内部にとどまらず、「極小表現をモチーフとする大域解析」という研究の方向性を提唱し、種々の幾何的モデルを通して、ユニタリ反転作用素の決定、フーリエ変換の変形理論、４階の微分方程式に付随する特殊関数等を含む、数学の異なる分野が結びついた理論を推進した。さらに、研究代表者が導入した「複素多様体における可視的作用」の応用として、無調複性の伝搬定理を論証した。

研究成果の概要（英文）：Minimal representations are one of building blocks of unitary representations. Classic examples are the Weil representation, and intensive algebraic studies have been made since 1990s by many experts. In contrast, I proposed yet another geometric approach to minimal representations, by which we could expect a fruitful theory on global analysis by maximal symmetries. It includes a theory of unitary inversion operator on the L model that generalizes the Euclidean Fourier transform with G. Mano ([Memoirs of AMS, 1000, (2011)]), a deformation theory of the Fourier transform in [Compositio Math. 2012], a theory of new "special functions" satisfying a certain ODE of order four with G. Mano, Hilgert, and Moellers in [Ramanujan J. 2011], and a generalization of the Schroodinger/Fock model in the framework of the Jordan algebra among others.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数解析　リー群　極小表現　表現論　ユニタリ表現　簡約リー群　分岐則　可視的作用

１．研究開始当初の背景

（１）（極小表現）古典的に重要な Segal-Shale-Weil 表現は C 型の単純群の極小表現である。より一般の単純リー群の極小表現は Kostant, Kazhdan 等による研究が契機の一つとなり、1990 年頃より盛んになり、代数的表現論による研究が先行していた。

一方、研究代表者の小林は Orsted と共同で、擬リーマン多様体における共形幾何学を用いるという新しい観点で、不定値直交群の極小表現が構成できることを発見し [C.R.Academy Paris 1998]、さらに、二乗可積分関数のなすヒルベルト空間に極小表現を実現する「シュレーディンガーモデル」を確立し[Adv. Math. 2003]、極小表現の大域解析に先鞭をつけた。研究当初の時点では「ユニタリ反転公式の決定問題」が重要な未解決問題であった。

（２）（分岐則）表現の分岐則を調べることは、表現の理論のもっとも主要な問題の一つであり、新しい表現の構成や分析に強力な手法を与えるのみならず保型形式の整数論や非可換調和解析の研究にも深くかかわっている。

しかし、簡約リー群の無限次元表現を非コンパクトな簡約部分群に制限したときの分岐則は、テンソル積の分解のようなもっとも基本的な設定でさえ、悪いふるまいをするものが多く、事例研究を超えた一般的理論の研究は、1980 年代後半まで殆ど行われていなかった。小林は 1980 年代後半より、ユニタリ表現の分岐則に関する悪いふるまいを分析し、逆に、特に良いふるまいをするものを抽出するというプログラムを立て、とりわけ、有限重複性をもつ離散的分岐則の一般理論 (Invent Math. 1994, Ann. Math. 1998, Invent math 1998）がこの分野のブレークスルーとなり、この枠組みの中での無限次元の分岐則の研究がアメリカ・フランス・ドイツ・デンマーク・日本・シンガポールなどで盛んに行われるようになってきていた。

（３）（無重複表現）同じ既約表現は高々一度しか現れないという「無重複表現」は、既約表現を一般化した概念であり、種々の展開定理においても有用な役割を果たす。無重複表現を見つける手法は、従来、有限次元表現の場合には、個別撃破による組合せ論的手法（コンピュータ計算を含む）や Cartan-Weyl の最高ウェイト理論に代数幾何学の強力な手法を合わせた spherical variety の理論があり、また、無限次元の Weil 表現に関連して dual pair の理論も Howe 教授の研究以来多くの研究の蓄積がある。

これらの、従前の手法は（例えば spherical variety の理論は有限次元表現に限るなど）適用範囲が限られた中で強力であった。一方、「複素多様体上の可視的作用」という新しい概念（小林, 2003）を用いることによって、組合せ論的な色彩が濃厚な有限次元表現の複雑な無重複定理と、解析的な色彩が濃厚な無限次元表現の分解の連続スペクトラムにおける無重複性定理を同時に説明できる、といった汎用性の高い例が得られていた（小林、Publ RIMS 2005)。

２．研究の目的

（１）（極小表現の大域解析）
研究代表者の小林は、表現論の内部にとどまるのではなく、「極小表現をモチーフとした大域解析」の研究に先鞭をつけた。これは、「群からみると極めて小さな無限次元表現」の発想を逆転し、「関数空間からみると極めて大きな群対称性」を視点とするプログラムであり、この方向に大きく理論を進展させることを主目的とする。

（２）（無限次元表現の分岐則）
単純リー代数の Verma 加群を簡約部分代数の加群とみなしたときに、少なくとも一つは既約部分加群が存在するための判定条件および、現れる既約加群（通常は無限次元表現になる）の大きさを評価することができるような理論を整備・構築する。さらに、Zuckerman の導来函手加群 A_q を対称対に制限したときに離散的に分解するのはどのような場合かについて、分類リストをつくることによって、表現の分岐則の研究者および分岐則を用いる他分野の研究者に広く役立つ基礎研究を行うことを目的とする。

（３）（無重複表現）
「一期一会」が鮮明な記憶として残るように、また、「唯一無二」とう性質がその対象を際立てるように、表現の分解における無重複性は、それに対応する展開定理（フーリエ級数、テイラー展開、球関数展開をはじめとする種々の展開）に鮮明な意味を与える。

この無重複性を生み出す、新しい手法として、当該研究代表者が提唱した「複素多様体における可視的作用」の概念をさらに推し進め、正則ベクトル束を舞台として無重複表現を系統的に構成する一般性の高い定理を（使いやすい形で）定式化し、それを論証することによって、無重複表現に新しい観点を与えることを目的とする。

３．研究の方法

基礎理論の構築とその方向性の決定に関しては主に研究代表者が担当し、その応用に関してはそれぞれ内外の研究協力者と共同研究を推進する。具体的には、特殊関数や Jordan 代数と極小表現の関わり，Dunkl 変換と極小表現の関わり、放物幾何への応用、不定値軽量をもつ空間への不連続群との関わり、等に関して、それぞれの専門家と共同で研究を行う。

４．研究成果

（１）極小表現の大域解析

単純リー群の極小表現は，分解・誘導という観点において最も根源的なユニタリ表現の１つであり,多くの代数的研究がなされている．筆者は極小表現をモチーフとする大域解析に焦点を当て，「群から見た極小性ではなく、関数空間から見た極大性」という標語を掲げ、異種の新しい幾何的モデルを通して極小表現の大きな対称性が数学の異なる分野と結びつくような理論構成の方向性を提唱した([Publ RIMS2011])。その方向に向かっての個別の成果を以下に記載する。

①（極小表現のシュレーディンガーモデルにおける反転公式）

シュレーディンガーモデルはヒルベルト空間の構造が取り扱いやすいという利点がある反面、一部の群作用を明示的に与えるのが困難であるという弱点もある。群作用を明示的に与えるための、最大の困難は、ワイル群最長元に対応するユニタリ反転変換であり、それに焦点をあて、一般符号の二次形式によって定まる錐上の大域解析の要となるフーリエ変換に相当するユニタリ反転変換を決定した。この成果は、著書[アメリカ数学会メモワール，2011]として出版した。

②(フーリエ変換の変形理論)

C 型単純群の極小表現である Weil 表現と D 型単純群の極小表現を連続的に結ぶ複素解析的半群を構成し，長編の第二論文[Compositio Math. 2012]で、古典的な Fourier 変換，Hankel 変換，Dunkl 変換，Hermite 半群等が特殊値として現れる作用素の変形理論を与えた。

③.(特殊関数)

極小表現のシュレーディンガーモデルから自然に生じる４階の微分方程式を満たす、新しい“特殊関数”および新しい“特殊多項式”を導入し、その基礎的性質を研究した(第８論文、第９論文、第１３論文).（水素原子の波動関数にラゲール多項式が現れることは、極小表現が最高ウェイト表現となり、上記の特殊関数が退化した場合として捉えられる)。

④(Kostant-関口対応の量子化)

Weil 表現の Fock モデルとシュレーディンガーモデルが、冪零軌道における Kostant-関口対応の幾何的量子化であるという観点を提唱し、その観点から、Jordan 代数の共形変換群の極小冪零軌道の量子化として、最高ウェイトをもつ極小表現の Fock モデルを冪零軌道上の正則関数を用いて自然に構成することに成功した（第一論文)。

⑤(極小表現の分岐則)

極小表現の半単純対称対に関する分岐則を解析的手法で A 型の場合に完全に決定した（第１４論文)。

(2)　無限次元表現の分岐則

①　簡約リー代数の Verma 加群をその簡約部分代数に制限したときに、（隠れた連続スペクトラムによる障害のため）既約成分が全く現れないことが起こりうる。このような現象を解明し、いつ、離散分解するかについての必要十分条件を発見し、代数的手法によって論証した。

さらに、無重複な分岐則の諸例を与えた（第５論文)。上記の成果は、Verma 加群と主系列表現の双対性により、幾何学的な言葉に翻訳することができる。とりわけ、共形幾何学における応用として、多様体上の関数から部分多様体上の関数への共形不変な微分作用素を決定するという問題において、上記の成果は基礎的な役割の一つを果たすと考えられる。中欧における winter school において、上記の理論および共形幾何への応用についての連続講演を行い、さらにデンマークやチェコやフランスの研究協力者達と、上記の成果の放物幾何学への応用に関する共同研究を開始した。

②　楕円型軌道の幾何的量子化として得られる無限次元表現（Zuckerman の A_q 加群）を対称対に制限したときに、いつ離散的に分解するかについて、大島芳樹氏と共同研究で完全な分類を与え、論証した。

この分類は「系列」を如何に理解するかということも含まれている（第３論文)。

この論文は、無限次元表現の分岐則が代数的手法によって研究できる設定を明確化するものであり、具体的な分岐則を完全に決定するという問題においての、礎石の役割を果たす。

③　対称空間を超えた枠組で等質空間上の大域解析を行おうとする場合、そもそも、群対称性を用いた大域解析が有効であるかを見極めるということが最初の重要な課題になる。

実際、等質空間によっては、その上の正則表現の中に同じ既約表現が無限回現れるため、群対称性では関数空間を十分に統制できないことが起こりうるからである。そこで、等質空間の正則表現に現れる重複度の評価式を与え、それを用いて、重複度が有限／一様有界になるための必要十分条件を旗多様体の幾何的な言葉で与え、この重要課題を決定的な形で解決した。

この成果は、今後、非対称空間の大域解析の研究の基礎となると期待される。

（３）可視的作用の理論

①　複素多様体に群が可視的に作用しているという幾何的な設定の下で、ファイバーにおける無重複性が、正則切断における無重複

性に伝播するという、「無重複の伝播性定理」を論証した(第６論文)。その応用として、一般線形群の２つの既約有限次元表現のテンソル積表現がいつ無重複に分解するかに関して、従来、組合せ論的な計算によって得られていた分類表(Stembridge, 2001)が、簡単な幾何的考察から再構成できることがわかる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　15　件）

① J.Hilgert, T.Kobayashi, J. Mollers, Fock model and Segal-Bargmann transform for minimal representations of Hermitian Lie groups, Journal of Functional Analysis, 査読有, 263 巻, 2012, 3492-3563
DOI:10.1016/j.jfa.2012.08.026.

② S. Ben Saiid, T.Kobayashi, B. Orsted, Laguerre semigroup and Dunkl operators, Compositio Mathematica, 査読有, 148 巻, 2012, 1265-1336
DOI:10.1112/S0010437X11007445.

③ T.Kobayashi and Y. Oshima, Classification of discretely decomposable A q(λ) with respect to reductive symmetric pairs, Advances in Mathematics, 査読有, 231 巻, 2012, 2013-2047
DOI:10.1016/j.aim.2012.07.006.

④ T. Kobayashi, Natural differential operators in parabolic geometry and branching problems, Proceedings of Symposium on Representation Theory 2012, held at Kagoshima, 査読無, December 4-7, 2012, pages 31-55
ISBN 978-4-9902328-8-7.

⑤ T. Kobayashi, Restrictions of generalized Verma modules to symmetric pairs, Transformation Groups, 査読有, 17 巻, 2012, 523-546.
DOI: 10.1007/s00031-012-9180-y.

⑥ T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-freeness property for holomorphic vector bundles, Progress in Mathematics, Birkhauser, 査読有, 306 巻, 2012, pp.113-140

⑦ T. Kobayashi, Branching problems of Zuckerman derived functor modules. In Representation Theory and Mathematical Physics (in honor of Gregg Zuckerman), Contemporary Mathematics, 査読有, 557 巻, 2011, 23-40. Amer. Math. Soc., Providence, RI. ISBN: 9780821852460.

⑧ J. Hilgert, T. Kobayashi, G. Mano, and J. Möllers, Orthogonal polynomials associated to a certain fourth order differential equation. Ramanujan Journal, 査読有, 26 巻, 2011, 295-310
DOI: 10.1007/s11139-011-9338-6.

⑨ J. Hilgert, T. Kobayashi, G. Mano, and J.Möllers, Special functions associated to a certain fourth order differential equation, Ramanujan Journal, 査読有, 26 巻,2011, 1-34 (published online August 31, 2011)
DOI: 10.1007/s11139-011-9315-0. arXiv:0907.2608

⑩ T. Kobayashi, Algebraic analysis of minimal representations, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, 査読有, 47 巻, 2011, 585-611, Special issue in commemoration of the golden jubilee of algebraic analysis.
DOI: 10.2977/PRIMS/45.arXiv:1001.0224

⑪ T. Kobayashi, Geometric analysis on minimal representations, In J. Matsuzawa and S. Tsunoda, editors, Ninth Oka Symposium Lecture Notes,査読無, 2011, 27-61. Department of Mathematics, Faculty of Science, Nara Women's University

⑫ T. Kobayashi, Geometric quantization, limits, and restrictions-some examples for elliptic and nilpotent orbits, In Lisa Jeffrey, Xiaonan Ma, and Michèle Vergne, editors, Geometric Quantization in the Non-compact Setting, 査読無, 8 巻 Oberwolfach Reports, 2011,466-469
DOI: 10.4171/OWR/2011/09.

⑬ T. Kobayashi and J. Möllers, An integral formula for L^2 eigenfunctions of a fourth order Bessel-type differential operator, Integral Transforms and Special Functions, 査読有, 22 巻, 2011, 521-531.DOI: 10.1080/10652469.2010.533270.

⑭ T. Kobayashi, B. Ørsted, and M. Pevzner, Geometric analysis on small unitary representations of GL(n,R). Journal of Functional Analysis, 査読有, 260(6) 巻, 2011, 1682-1720 (published online first, on 28 December 2010).

DOI: 10.1016/j.jfa.2010.12.008.

⑮ B. Orsted, S.B. Said, T. Kobayashi, Deformations of the fourier transform, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, 査読無, 2011, 65-68 DOI:10.4171/OWRI2011/09 No.09/2011.

〔学会発表〕(計 24 件)

① T. Kobayashi, Branching Laws for Infinite Dimensional Representations of Real Reductive Lie Groups (5 lectures), Mathematical Panorama Lectures in celebration of 125th birthday of Srinivasa Ramanujan (5回の連続講演,招待講演), 2013 年 2 月 18 日-2013 年 2 月 22 日, Tata Institute, India.

② T. Kobayashi, Natural Differential Operators in Parabolic Geometry and Branching Problems, Symposium on Representation Theory 2012, Kagoshima (招待講演), 2012 年 12 月 4 日-2012 年 12 月 7 日, 鹿児島.

③ T. Kobayashi, Geometric Analysis on Minimal Representations, Mathematical Physics and Representation Theory (in honor of Prof. Igor Frenkel's 60 th birthday)(招待講演), 2012年5月12日-2012年5月15日, Yale University, USA.

④ T. Kobayashi, Finite Multiplicity Theorems and Real Spherical Varieties. Branching Laws (11-31 March 2012). Institute for Mathematical Sciences, NUS, Singapore, 19 March 2012.(招待講演)

⑤ T. Kobayashi, Stable Spectrum for non-Riemannian Locally Symmetric Spaces. Lie Groups: Structure, Actions and Representations (in honor of Prof. Joe Wolf's 75th birthday). Ruhr-Universität, Bochum, Germany, 11-14 January 2012.(招待講演)

⑥ T. Kobayashi, Conformally Equivariant Differential Operators and Branching Problems of Verma Modules. Workshop on Geometric Analysis on Euclidean and Homogeneous Spaces (in honor of Sigurdur Helgason's 85th birthday, in conjuction with the AMS special session ''Radon Transforms and Geometric Analysis", January 5-7, 2012). Tufts University, USA, 8-9 January 2012.(招待講演)

⑦ T. Kobayashi, Discrete Spectrum for Non-Riemannian Locally Symmetric Spaces. Cohomology of Arithmetic Groups (on the occasion of Prof. MS Raghunathan turning 70 during the year). Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai, India, 28-31 December 2011. (招待講演)

⑧ T. Kobayashi, Finite Multiplicity Theorems, Lie Groups, Lie Algebras and their Representations (organized by Joseph Wolf). University of California, Berkeley, USA, 5-6 November 2011. (closing lecture, 招待講演)

⑨ T.Kobayashi, Analysis on pseudo-Riemannian locally symmetric spaces. Chern Centennial Conference. Mathematical Science Research Institute (MSRI) at Berkeley, California, USA, 30 October-5 November 2011. (招待講演)

⑩ T. Kobayashi, On Real Spherical Homogeneous Spaces. Analysis on Lie Groups. Max Planck Institute for Mathematics, Bonn, Germany, 27 September 2011. (招待講演)

⑪ T. Kobayashi, Analysis of Minimal Representations. Harmonic Analysis, Deformation Quantization, Non-commutative Geometry. Scalea, Italy, 5-9 September 2011. (招待講演)

⑫ T. Kobayashi, Conformally Equivariant Differential Operators and Branching Problems of Verma Modules. Lie Groups: Geometry and Analysis (JSPS/DFG seminar). Paderborn, Germany, 5-10 September 2011. (招待講演)

⑬ T. Kobayashi, Branching problems for unitary representations-analytic aspects (opening lecture), AIM Conference: Branching Problems for Unitary Representations. Max Planck Institute for Mathematics, Bonn, Germany, 25-29 July 2011. (招待講演)

⑭ T. Kobayashi, Branching problems for unitary representations-algebraic aspects. (opening lecture), AIM Conference: Branching Problems for Unitary Representations. Max Planck Institute for Mathematics, Bonn, Germany, 25-29 July 2011. (招待講演)

⑮ T. Kobayashi, Multiplicities of Irreducible Representations. Seminar Sophus Lie. Erlangen, Germany, 15-16 July 2011. (closing lecture, 招待講演)

⑯ T. Kobayashi, Analysis on Minimal Representations. IX. International Workshop: Lie Theory and Its Applications in Physics. Varna, Bulgaria, 20-26 June 2011. (招待講演)

⑰ T. Kobayashi, Restrictions of Verma Modules to Symmetric Pairs and Some Applications to Differential Geometry. (2 lectures), Representation Theory XII. Dubrovnik, Croatia, 19-26 June 2011. (招待講演)

⑱ T. Kobayashi, Restrictions of Verma Modules to Symmetric Pairs and Some Applications to Differential Geometry. Special day on Lie groups. Utrecht University, the Netherlands, 17 May 2011. (招待講演)

⑲ T. Kobayashi, Restrictions of Verma Modules to Symmetric Pairs and Some Applications to Differential Geometry. Workshop on the Interaction of Representation Theory with Geometry and Combinatorics. Hausdorff Institute, Bonn, Germany, 28 March-1 April 2011. (招待講演)

⑳ T. Kobayashi, Geometric Quantization of Coadjoint Orbits, Limits and Restrictions. (closing lecture), The 10th Workshop on Nilpotent Orbits and Representation Theory (NORTh10). Kyushu University, Japan, 19-23 February 2011. (招待講演)

㉑ T. Kobayashi, Geometric Quantization, Limits, and Restrictions-Some Examples for Elliptic and Nilpotent Orbits. Geometric Quantization in the Non-compact Setting (organized by L. Jeffrey, X. Ma and M. Vergne). Oberwolfach, Germany, 13-19 February 2011. (招待講演)

㉒ T. Kobayashi, Analysis on Minimal Representations. Special Seminar [Mathematics]. IPMU, the University of Tokyo, Japan, 9 December 2010. (招待講演)

㉓ T. Kobayashi, Geometric Analysis on Minimal Representations. 9th Oka Symposium. Nara Women's University, Japan, 4-5 December 2010.

㉔ T. Kobayashi, Geometric Analysis on Minimal Representations. Geometry and Quantum Theory. Nijmegen, the Netherlands, 28 June-2 July 2010. (招待講演)

〔図書〕（計 1 件）

① T. Kobayashi, G. Mano, The Schrodinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group O(p,q), アメリカ数学会(Memoirs of American Mathematical Society). 132 (2011).

〔その他〕

ホームページ等

www.ms.u-tokyo.ac.jp/~toshi

６．研究組織

(1)研究代表者

小林　俊行（KOBAYASHI, Toshiyuki）
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：８０２０１４９０

(3)連携研究者

平地　健吾（HIRACHI, Kengo）
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号： ６０２１８７９０

関口　英子（SEKIGUCHI, Hideko）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：５０２８１１３４

笹木　集夢（SASAKI, Atsumu）
東海大学・理学部数学科・講師
研究者番号：６０５１４４５３

大島　利雄（OSHIMA, Toshio）
城西大学・理学部数学科・教授
研究者番号：５００１１７２１

河野　俊丈（KOHNO, Toshitake）
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：８０１４４１１１

金井　雅彦（KANAI, Masahiko）
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：７０１８３０３５

落合啓之（OCHIAI, Hiroyuki）
九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・基礎理論研究部門
研究者番号：９０２１４１６３