

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 5 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2014

課題番号：22340028

研究課題名(和文) Klein群および複素力学系の退化とその特異性の解析

研究課題名(英文) Analysis of degenerations and singularities of Kleinian groups and complex dynamics

研究代表者

志賀 啓成 (SHIGA, Hiroshige)

東京工業大学・理工学研究科・教授

研究者番号：10154189

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 11,800,000円

研究成果の概要(和文)： Klein群の変形空間の複素構造について研究が進展し、Klein群の不連続成分の形状がその変形空間の構造に大きく影響を与え、様々な複素解析的性質を発見した。また、モジュライ空間の1点が退化する際、単射半径とその点を双曲構造について新たな知見が得られた。複素力学系での無理的中立不動点近傍の不変集合の構造について新たな知見が得られた。特異領域に関する境界Harnack原理の進展、および錐特異性を持つ双曲計量の存在と一意性について具体的な評価が得られた。

研究成果の概要(英文)： By developing the research of the complex structure of the deformation space of a Kleinian group, we find many complex analytic properties of the deformation space. We also find a relationship between the infectivity radius of a point in the moduli space and the hyperbolic structure as the point tends to the boundary. In the complex dynamics, we find new phenomenon on the structure of invariant sets near indifferent fixed points. A progress on the boundary Harnack principle on singular domains is done and some estimates about hyperbolic metrics with cone singularities are obtained.

研究分野：数物系科学

キーワード： Klein群 リーマン面 タイヒミュラー空間 複素力学系 複素解析 国際研究者交流 国際情報交換
多国籍

1. 研究開始当初の背景

- (1) Brock, Canary, Minsky らによって最近なされた Klein 群における Ending lamination 予想の解決.
- (2) 退化した Klein 群で, ある種の性質を持つものの不連続領域の性質の計量的に特徴付けがなされた.
- (3) 宍倉らによる, 複素力学系での parabolic な境界点での力学系の変動・爆発の様相の研究.
- (4) Y. Minsky, D. Canary の研究グループによる Klein 群の $PSL(2, \mathbb{C})$ 表現空間の境界の研究.

2. 研究の目的

Klein 群や複素力学系では複素変数の写像の合成によって得られる写像の族を扱う. そして多くの場合—例えばマンデルブロー集合のように—パラメータを持った写像の力学系が対象になる. 通常, 複素力学系では, 一つの (非可逆) 有理写像の反復合成を扱い, それは半群をなすが, 本研究ではそれに加えて可逆な写像の有限生成群も力学系として扱う. すなわち, それは Klein 群の場合でありパラメータ空間は Klein 群の $PSL(2, \mathbb{C})$ 表現の空間になる. 本研究の目的は, 与えられた Klein 群および複素力学系のパラメータ空間において“退化”が起こるとき, その力学系で生じる現象を多面的に解析し, その様相を明らかにすることにある.

3. 研究の方法

研究代表者, 分担者の担当を以下の課題に分け 研究代表者が全体を総括する.

- (1) Klein 群および複素力学系の変形空間の境界の様相の研究 (志賀, 大鹿, 宍倉, 須川).
- (2) リーマン面の正則族およびその正則切

断の個数評価の問題 (志賀, 足利).

- (3) Klein 群の不変成分, 複素力学系の Fatou 集合の退化とその自軒斥的性質の研究 (志賀, 宍倉, 相川).
 - (4) 特異領域の解析 (相川, 須川)
- ### 4. 研究成果
- (1) Klein 群の擬等角変形空間の複素構造について研究が進展し, Klein 群の不連続成分の形状がその変形空間の構造に大きく影響を与え, 様々な複素解析的性質, 例えば正則凸性などが変化することが発見された. (志賀).
 - (2) リーマン面のモジュライ空間の 1 点が退化する際, 単射半径とその点を表すリーマン面の双曲構造について新たな知見が得られた. また, Teichmüller 曲線について, その剛性と有限性について新しい結果が得られた. (志賀).
 - (3) Klein 群の理論の自由群や曲面群の表現空間や Heegaard 分解に付随した写像類群の部分群の研究への応用 (大鹿).
 - (4) 無理的中立不動点の近くの不変集合の構造について新たな知見が得られた (宍倉).
 - (5) 特異領域に関する境界 Harnack 原理の進展 (相川).
 - (6) 退化代数曲線族の符号不足数の研究で用いられた「Dedekind 和の相互律」が一般の場合に拡張された (足利).
 - (7) 錐特異性を持つ双曲計量の存在と一意性について, 一般のリーマン面上で具体的な評価が得られた (須川).

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 44 件) すべて査読有

1. H. Aikawa and T. Itoh, Dichotomy of global capacity density, to appear in Proc. Amer. Math. Soc., <http://dx.doi.org/10.1090/proc/12672#sthash.5AvVpwnT.dpuf>
2. H. Aikawa, Intrinsic ultracontractivity via capacity width, to appear in Rev. Mat. Iberoamericana, DOI: 10.4171/RMI
3. T. Ashikaga, Toric modifications of cyclic orbifolds and an extended Dedekind sums, to appear in Tohoku Math. J., <http://www.math.tohoku.ac.jp/tmj/Emain.html>
4. H. Shiga, Holomorphic families of Riemann surfaces and monodromy, Handbook of Teichmuller Theory Volume IV, European Mathematical Society (2014), 439-460, DOI: 10.4171/117
5. L. Lui, H. Shiga and Z. Sun, Convex hull of set in thick part of Teichmuller space, Science China Math. 57 (2014), 1799-1810, DOI: 10.1007/s11425-014-4871-6
6. H. Aikawa, Extended Harnack inequalities with exceptional sets and a boundary Harnack principle, J. Anal. Math., 124, 1 (2014), 83-116, DOI: 10.1007/s11854-014-0028-3
7. S. Ponnusamy, S. K. Sahoo and T. Sugawa, Radius problems associated with pre-Schwarzian and Schwarzian derivatives, Analysis 34 (2014), 163-171, DOI: 10.1515/anly-2012-1219
8. K. Ohshika, Reduced Bers boundaries of Teichmuller spaces, Ann. Inst. Fourier, 64-1 (2014), 145-176, DOI: 10.5802/aif.2842
9. W. Jeon, I. Kim, K. Ohshika and C. Lecuire, Primitive stable representations of free Kleinian groups, Israel J. Math. 199 (2014), no. 2, 841-866, DOI: 10.1007/s11856-013-0062-3
10. I. Kim, C. Lecuire and K. Ohshika, Primitive stable closed hyperbolic 3-manifolds. Topology Appl. 172 (2014), 68-71, DOI:10.1016/j.topol.2014.05.003
11. K. Ohshika, Compactifications of Teichmuller spaces, Handbook of Teichmuller theory vol. IV, IRMA, EMS(2014), 235-254, DOI: 10.4171/117-1/6
12. H. Miyachi, K. Ohshika and S. Yamada, Weil-Petersson Funk metric on Teichmuller space, Handbook of Hilbert geometry vol. 22 (2014), IRMA EMS, 339-352, DOI: 10.4171/147-1/12
13. H. Shiga, On injectivity radius in configuration space and in moduli space, In the tradition of Ahlfors-Bers. VI, Contemp. Math., AMS, 590(2013), 183-189, DOI: 10.1090/conm/590
14. H. Shiga, On the boundary behavior of Cauchy integrals, Ann. Univ. Mariae Curies-Sklodowska, Sect. A 67 (2013), 65-82, DOI: 10.2478/v10062-012-0023-z
15. V. Gutlyanskii, K. Sakan, T. Sugawa, On μ -conformal homeomorphisms and boundary correspondence, Complex Var. Elliptic Equ., 58 (2013), 947-962, DOI: 10.1080/17476933.2011.613116
16. K. Ohshika, A note on the rigidity of unmeasured lamination space, Proc. Amer. Math. Soc., 141 (2013), 4385-4389, <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-2013-11670-9>
17. M. Beck, Y. Jiang, S. Mitra and H. Shiga, Extending holomorphic motions and monodromy, Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica, 37 (2012), 53-67, DOI:10.5186/aasfm.2012.3713
18. Y. Jiang, S. Mitra and H. Shiga, Quasiconformal motions and isomorphisms of continuous families of Mobius groups, Israel Journal of Mathematics, 188 (2012), 177-194, DOI: 10.1007/s11856-011-0098-1

19. H. Shiga, On the number of holomorphic families of Riemann surfaces, *Contemporary Mathematics* 575, AMS (2012), 331-342, <http://dx.doi.org/10.1090/conm/575/11383>
20. T. Sugawa, Quasiconformal extension of strongly spirallike functions, *Comput. Methods Func. Theory*, 12 (2012), 19-30, DOI: 10.1007/BF03321810
21. T. Sugawa, A remark on Loewner's theorem, *Interdiscip. Inform. Sci.*, 18 (2012), 19-22 <http://dx.doi.org/10.4036/iis.2012.19>
22. Y. C. Kim and T. Sugawa, On power deformations of univalent functions, *Monatsh. Math.*, 167 (2012), 231-240, DOI: 10.1007/s00605-011-0344-y
23. K. H. Cho, S.-A Kim and T. Sugawa, On a multi-point Schwarz-Pick lemma, *Comput. Methods Func. Theory*, 12 (2012), 483-499, DOI: 10.1007/BF03321839
24. Y. C. Kim and T. Sugawa, On univalence of the power deformation $z(f(z)/z)^c$, *Chinese Ann. Math., Ser. B* 33 (2012), 823-830, DOI: 10.1007/s11401-012-0750-z
25. H. Miyachi and H. Shiga, Holonomies and the slope inequality of Lefschetz fibrations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 139 (2011), 1299-1307, DOI: 10.1090/S0002-9939-2010-10563-4
26. Y. C. Kim and T. Sugawa, Hardy spaces and unbounded quasidisks, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 36 (2011), 291-300, DOI:10.5186/aasfm.2011.3618
27. S.-A Kim and T. Sugawa, Geometric invariants associated with projective structures and univalence criteria, *Tohoku Math. J.* 63 (2011), 41-57, DOI:10.2748/tmj/1303219935
28. D. Klaus, O. Roth and T. Sugawa, Metrics with conical singularities on the sphere and sharp extensions of the theorems of Landau and Schottky, *Math. Z.* 267 (2011), 851-868, DOI: 10.1007/s00209-009-0649-x
29. S. Kanas and T. Sugawa, Sharp norm estimate of Schwarzian derivative for a class of convex functions, *Ann. Polon. Math.* 101 (2011), 75-86, DOI:10.1017/S0013091504000306
30. S.-A Kim and T. Sugawa, Invariant Schwarzian derivatives of higher order, *Complex Analysis and Operator Theory* 5 (2011), 659-670, DOI: 10.1007/s11785-010-0081-6
31. K. Ohshika, Realising end invariants by limits of minimally parabolic, geometrically finite groups, *Geometry & Topology*, 15 (2011), 827-890, DOI: 10.2140/gt.2011.15.827
32. H. Shiga, Denjoy-Wolff theorem on Riemann surfaces, Teichmüller theory and moduli problem, *Ramanujan Math. Soc.*, 10 (2010), 577-582, <http://www.ramanujanmathsociety.org/publications/rms-lecture-notes-series/number10teichmullertheoryandmoduliproblem>
33. H. Shiga, Modulus of continuity, a Hardy-Littlewood theorem and its application, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu "Infinite dimensional Teichmüller space and moduli space"*, B17 (2010), 127-133, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/open/B17/pdf/B17-10.pdf>
34. S. Mitra and H. Shiga, Extensions of holomorphic motions and holomorphic families of isomorphisms of Möbius groups, *Osaka J. Math.*, 47 (2010), 1167-1187, <http://projecteuclid.org/euclid.ojm/1292854320>
35. H. Aikawa, Modulus of continuity of the Dirichlet solutions, *Bull. London Math. Soc.*, 42-5 (2010), 857-867, DOI: 10.1112/blms/bdq040
36. T. Sugawa, Cardioids and Teichmüller spaces, *Ramanujan Math. Soc. Lecture Notes Series in Mathematics*, 10 (2010), 583-596, <http://www.ramanujanmathsociety.org/publications/rms-lecture-notes-series/number10teichmullertheoryandmoduliproblem>

37. G. D. Anderson, T. Sugawa, M. K. Vamanamurthy and M. Vuorinen, Twice-punctured hyperbolic sphere with a conical singularity and generalized elliptic integral, *Math. Z.*, 266 (2010), 181-191, DOI: 10.1007/s00209-009-0560-5
38. T. Sugawa, A conformally invariant metric on Riemann surfaces associated with integrable holomorphic quadratic differentials, *Math. Z.*, 266 (2010), 645-664, DOI: 10.1007/s00209-009-0590-z
39. T. Ashikaga, Local signature defect of fibered complex surfaces via monodromy and stable reduction, *Comment. Math. Helv.*, 85 (2010), 417-461, DOI: 10.4171/CMH/201
40. T. Ashikaga, Local signature defect of fibered complex surfaces via moduli and monodromy, *Demonstratio Math.*, 43 (2010), 263-276, <http://demmath.mini.pw.edu.pl/issues.html>

[学会発表] (計 136 件) すべて招待講演

1. 宍倉光広, 連分数と力学系のくりこみ, 日本数学会年会, 2015/3/23, 明治大学駿河台キャンパス (東京都千代田区)
2. H. Shiga, Klein 群の変形空間について, 日本数学会年会 (特別講演), 2015/3/23, 明治大学駿河台キャンパス (東京都千代田区)
3. K. Ohshika, Hyperbolic 3-manifolds and the Schottky space viewed as lying in the character variety, Group Action Forum 2014, 2014/12/16, Tsinghua-Sanya International Mathematics Forum, Sanya, Hainan, China
4. H. Shiga, Complex analytic properties of deformation spaces of Kleinian groups I & II, 低次元多様体モジュライ空間の幾何学, 2014/12/11, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市左京区)
5. K. Ohshika, Geometry of Kleinian groups and its applications, MSJ Autumn meeting, plenary address, 2014/9/26, 広島大学 (広島県東広島市)

6. H. Shiga, Teichmüller curves and holomorphic maps on Riemann surfaces, Geometry on Groups and Spaces, ICM Satellite Conference on Geometric Group Theory & Geometric Structures, 2014/8/9, KAIST, Daejeon, Korea
7. H. Aikawa, Intrinsic ultracontractivity and the boundary Harnack principle, 7th International Conference on Stochastic Analysis and its Applications, 2014/8/6, Seoul National University, Seoul, Korea
8. T. Sugawa, Hyperbolic metric with conic singularities on Riemann surfaces and its applications, Workshop on Complex Geometry, 2014/7/29, University of Hong Kong, Hong Kong
9. H. Shiga, On analytic properties of deformation spaces of Kleinian groups, XVII th Conference on Analytic Functions and Related Topics, 2014/6/29, Institute of Mathematics and Computer Science of the State School of Higher Education in Chelm, Poland
10. 宍倉光広, Thurston's theorems in complex dynamics, What's Next? The mathematical legacy of Bill Thurston, 2014/6/26, Ithaca, NY, USA
11. 足利正, Higher-dimensional continued fractions for cyclic orbifold and Dedekind sums, 研究集会「射影多様体の幾何とその周辺 2013」, 2013/11/03, 高知大学 (高知県高知市)
12. H. Aikawa, Intrinsic ultracontractivity and the boundary Harnack principle -- a unified approach with capacitary width, Evolutionary problems Seminar, 2013/09/26, Institut Mittag-Leffler, Sweden

[図書] (計 1 件)

1. K. Matsuzaki and T. Sugawa (eds), Tohoku University Press, Sendai, Topics in Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis, 2013, 268 pages (1-268)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

志賀 啓成 (SHIGA, Hiroshige)
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：10154189

(2) 研究分担者

相川 弘明 (AIKAWA, Hiroaki)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：20137889

宍倉 光広 (SHISHIKURA Mitsuhiro)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：70192606

須川 敏幸 (SUGAWA, Toshiyuki)
東北大学・情報科学研究科・教授
研究者番号：32235858

足利 正 (ASHIKAGA, Tadashi)
東北学院大学・工学部・教授
研究者番号：90125203

大鹿 健一 (OHSHIKA, Ken'ichi)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：70183325

以上