様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 ２６ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(B)
研究期間：2010～2013
課題番号：２２３４００３１
研究課題名（和文）代数解析の方法による可積分系の研究

研究課題名（英文）Study of Integrable Systems by the Method of Algebraic Analysis

研究代表者
三輪　哲二（miwa, tetsuji）

京都大学・学内共同利用施設等・教授

研究者番号：１００２７３８６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　4,300,000円、（間接経費）　1,290,000円

研究成果の概要（和文）：フェルミオン的構成法とは、XXZスピン鎖の相関函数の計算を、斉次無限格子に対する準局所作用素の上の汎函数を松原方向の非斉次有限格子を導入することによって拡張するものであるが、このような理論を、連続極限であるサインゴルドン模型の場合まで拡張した。また、Babelon, Bernard, Smirnovにより、形状因子の構成の際に導入されたferumionが上記のフェルミオンと一致することを明らかにした。
一方、量子トロイダル代数の組み合わせ論的な表現の構成を行なった。

研究成果の概要（英文）：Fermionic construction of creation operators is extended to the sine-Gordon model. The fermion creation operator in this approach was identified with the BBS fermion in the study of form factors. We alsostudied the quantum tproidal algebra.

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学解析

キーワード：量子トロイダル代数　可解格子模型　スピン鎖　相関函数　平面分割　フェルミオン

１．研究開始当初の背景
代数解析の方法で可積分系を研究することが本研究の課題である。具体的なテーマとしては、格子模型とその極限の連続模型（共形場理論とサインゴルドン模型）についてのSmirnov, Jimboとの共同研究、および量子トロイダル代数の表現論についてのFeigin,Mukhin,Jimbo との共同研究が始まっていた。前者においては、９０年代に発展した代数解析的方法による格子模型の研究成果、特に XXZ 模型の一般の相関函数を差分方程式と積分表示で特徴づけるという成果と、高橋による XXX 模型の最近接の次の相関函数をリーマンゼータの特殊値を使って表示するという結果を結びつけることが最大の課題であった。これを目指しての研究の中から、真空期待値に限らない、準局所的な作用素の空間に、フェルミオンの性質を持つ生成作用素を用いて基底を構成し、この空間上に定義される汎函数に対して、フェルミオンの２点相関函数の行列式で汎函数の値を母函数の形で表示するという方法が見いだされた。６頂点模型のボルツマンウエイトは、量子アフィン sl(2)代数の２次元既約表現２個のテンソル積（補助空間と量子空間）で普遍 R 行列を表現したときの行列要素である。これを一般化して、補助空間の次元とスペクトル変数を一般にすることによって、松原方向と呼ばれる有限テンソル積を導入し、斉次のスペクトル変数を持つ無限テンソル積を量子空間とする円筒格子の上の格子模型が考えられる。円筒に巻き付く方向の円周は２次元表現に対応し長径方向に２次元表現が無限個並ぶ。こちらを空間方向と呼ぶ。円筒の無限方向に伸びる直線は、有限個が並び、次元とスペクトル変数はいろいろな値を取らせる。これを松原方向と呼ぶ。ここで、空間方向の２次元表現に、左半分と右半分に異なる係数で z 方向のパウリ行列を指数とする行列で捻りを入れる。さらに、空間方向に局所作用素を挿入した格子を考える。このような配置に対する分配函数を左半分と右半分の係数の差の tail がついた準局所作用素に対する汎函数と考える。準局所作用素に作用して、スピンと tail を変えるような作用素を構成する。空間方向の無限遷移行列の adjoint 作用を、スペクトル変数の値が１において展開すると、無限個の可換な生成作用素 t＊が得られる。補助空間として q 振動子を使い、通常の２次元表現とのテンソル積を考えて得られるモノドロミー行列は３角化される。左下の非対角成分を用いて、adjoint 作用を考えると、スペクトル変数が１での展開係数で、フェルミオン的な生成作用素を構成することができる。この作用素 b＊はスピンを１増やすが、スピンの反転を考えるとスピンを１減らす作用素 c＊が構成できる。これらの３種類の生成作用素で、すべての準局所作用を生成することができ、そうして作った準局所作用素の汎函数の値は、t＊の作用は松原方向の捻り付きの遷移行列の左半分と右半分に対応する２つの固有値の比を１で展開して得られる。また、b＊と c＊の２点函数は Smirnov によって展開されたアーベル積分の変形理論を使うことで定義される２変数の超越函数を展開することで計算され、２n 点函数は n x n の行列式となる。以上の結果をもとに、XXZ 模型を極限として含む２次元古典統計の模型である６頂点模型が、連続極限で共形場理論に移行することに着目して、共形場理論におけるフェルミオンの生成作用素を構成した。以上が研究当初の状態であった。
第２のテーマについては、格子模型の研究の基礎となる対称性はアフィン sl(2) 量子代数であるが、それを含むより大きな量子代数（量子トロイダル代数）に関しての研究が幾何学的背景から Feigin,Shiraishi 等によって始まっていた。実は代数的には量子トロイダル代数の研究は１９８０年代に Uglov, 斎藤、竹村などによって、頂点作用素による表現の構成の研究があり、その後三木、Vasserot らによって代数の構造論が発展していた。量子アフィン代数においては、表現の基底をヤング図形を用いて具体的に構成する研究があったが、Feigin 等による幾何学的な研究は量子トロイダル代数の表現論にも同様な研究方向が開かれていることを示すものであった。すなわち、幾何的な方法で存在が示されるよい基底を代数的に構成することが課題となる。頂点作用素による表現では、よい基底を作ることはできない。量子変形する前の理論でも、同様な問題はあり、無限 wedge 積を使ってよい基底が得られていた。これにならって、量子トロイダル代数のベクトル表現から出発して、無限テンソル積を用いることによって、フォック表現が構成できる。さらにこのフォック表現のテンソル積を考えると W 代数の表現の量子化に当たる表現が構成できる。こうしてできる表現は組み合わせ論的に記述できる基底を持つため、様々な組み合わせ論的な指標公式を得ることができる。研究開始の時点での状況は以上のようであった。

２．研究の目的
この研究の目的は、無限次元の量子化された sl(2)対称性に関する表現の性質を、組み合わせ論的なよい基底をもちいて明らかにするとともに、そのような対称性を持つ格子模型の相関函数を、フェルミオンの交換関係を満たす生成作用素によって、準局所作用素の空間の基底を構成することによって、２点函数の行列式の形に表示することである。

３．研究の方法
相関函数の研究は、パリ大学の Smirnov 教授、立教大学の神保教授との共同研究を行なう。Smirnov 教授を京都に招聘し、神保教授も京都に滞在して共同研究を行なう。また、日本側研究者がパリ大学を訪問する機会も作るなどして、できるだけ face to face の共同

研究ができる時間を作る。一方、量子代数の表現論の研究に関しては、Feigin 教授が、毎年夏の間３、４ヶ月を京都大学数理解析研究所の客員教授として京都に滞在されるので、この機会に、Mukhin 教授を招聘して神保教授も含めた共同研究を行なう。夏期以外にも、Feigin,Mukhin 両教授を短期に招聘して共同研究を行なう。

４．研究成果

２２年度の成果について述べる。サインゴルドン模型では、６頂点模型の研究で導入した作用素の母函数以外に、共形場理論におけるスクリーニング作用素に相当するものを付け加えることができる。これにより、ヴァーマ加群を越えて、はるかに大きな空間、すなわち、ヴィラソロ代数の表現で言えば、カッツ表の一連の規約表現を含むような空間を作り出すことができる。それらがすべて、真空表現の主要場から構成できるのである。これは一種の読み替え規則である。共形場理論ではヴィラソロ代数の対称性が存在したが、変形してサインゴルドンも系に移るとヴィラソロ代数の対称性は失われる。ところが、フェルミオンの生成作用素による作用素の構成と言う、新たに発券された対称性は、変形を生き延びるのである。行列式の形に汎函数を表示するためには、２点間数が問題になるが、BLZ 理論における DDV 方程式を松原方向に非斉次パラメタを配置した場合に拡張して扱うことによって、有質量の理論が構築できるので、２点函数を特徴づけることができる。これにより、主要場から従属場に移るときの１点函数の比をフェルミオン構成を用いて一般的に与えることができた。量子トロイダル代数の表現の構成については、フォック表現の無限テンソル積の中に組み合わせ論的な条件で決まる部分空間を見つけて、そこに代数が作用することを示した。この表現は最高ウエイト表現であり、最高ウエイトの次のレベルでは、空間の次元が１、その次は３次元、６次元となって、平面分割数が現われるので、マクマホン表現と呼ぶことにした。この表現は最高ウエイトにパラメタ K がはいる。このパラメタが、代数の持っているパラメタ ｑ１、ｑ２、ｑ３（ただし積は１）にたいして、特殊値を取ると、表現は部分加群を持つ。この部分加群は、平面分割に対する組み合わせ論的な制限条件で特徴づけられる。以上が２２年度の成果であった。

次に２３年度の成果を述べる。サインゴルドン模型の形状因子について、局所場との対応をフェミオン作用素を用いて明らかにした。サインゴルドン模型の局所場の全体を記述するという問題に対して、1987 年に Smirnov は差分方程式の解の積分表示という、複素解析的な立場から先鞭を付けた。1997 年に Babelon-Bernard-Smirnov は積分表示に現われる被積分函数の族が満たすべき条件を明らかにし、それを満たす函数をフェルミオン作用素によって系統的に作り出す方法を与えた。このフェルミオンがこの報告書で言及している、準局所作用素を生成するフェルミオンと同じものであることを、フェルミオンで作り出された準局所作用素の形状因子を与えることによって確認した。量子トロイダル代数の研究では、マクマホン表現に３方向に無限に伸びた土手をつけた表現を構成した。最高ウエイトのパラメタ K が特殊化し共鳴が起きると土手付き表現は部分加群を持つ。これらについて、部分加群の基底を組み合わせ論的に記述することができた。また、パラメタが１になる極限に対応して、極限として得られる無限ランクの一般線形リー代数に対して、量子トロイダル代数の表現から得られる表現に、Gelfand-Zetlin 基底が作れることを示し、これを用いて様々な指標公式を導いた。以上が２３年度の成果である。

次に２４年度の成果について述べる。格子模型に関しては、スピン１の場合の模型においてフェルミオン的な作用素の構成法を探った。量子トロイダル gl(n)代数の表現の構成を行なった。上に述べてきた量子トロイダル代数は、gl(1)に相当する場合であり、パラメタ q1,q2,q3 についての対称性を持つ。これに対して gl(n)の場合の量子トロイダル代数は q1 と q3 の対称性はあるが、q2 は他のパラメタとの対称性を持たない。新しい要素として、color と呼ぶランク n の grading がはいる。ヤング図形や、平面分割を考えるときに各箱に color がつく。Gl(1)の時の表現の構成を color 付きの gl(n)の場合にすべて再現した。このように構成した量子トロイダル gl(n)代数の表現は部分代数として含まれている量子アフィン gl(n)代数の表現を与えるので、後者の最高ウエイト表現の組み合わせ論的な基底が得られる。レベルは一般の場合である。とくに重要な場合は、量子アフィン gl(n)代数の表現としても規約になる場合であり、これは、q2 方向の土手はなく、残り２つのうちの一方が colorless となる場合であり、この表現は有限次元 gl(n)加群と同じパターンのヴァーマ加群による BGG 分解を持つ。以上が２４年度の成果である。

次に２５年度の成果について述べる。フェルミオンの生成作用素をスピン１の場合に構成することを目標にした。基本的な道具立ては、表現の fusion である。すなわち、量子アフィン sl(2)代数の２次元表現のテンソル積において、スペクトル変数を q だけずらしたものを考え３次元表現が実現される。この操作を生成作用素に対して適用したい。生成作用素は、モノドロミー行列から構成されるが、その構成法において基本的な条件は右方向への簡約性である。簡約性とは、生成作用素を定義するにあたって、局所作用素が非自明な有限区間において一定の操作をするのだが、この操作の範囲を、左あるいは右方向に拡大したときに、結果が変化しないことである。左方向への簡約性は、R 行列の intertwining property だけで出てくるもの

なので、スピン 1/2 からスピン 1 を作る fusion と適合することは明らかである。一方、右方向への簡約性はスピン 1/2 の場合に、非自明であった。fusion との整合性を考えるにあたっては、スピン 1/2 の場合の結果を整理する必要がある。結論から言うと、右方向への簡約性は、斉次無限格子の問題でありながら、生成作用素を定義するやり方は、非斉次有限格子に働く作用素の部分と、無限格子に作用するモノドロミー行列の adjoint 作用に切り分けることができ、後者は fusion との整合性は全く問題がない。そこで問題は、有限部分であるが、スピン 1/2 ではなかった問題が２つ起きる。どちらも singularity の有無の問題である。第一点は、b*に対応する有限部分と、c*に対応する有限部分の作用素を結合するときに、スペクトル変数を fusion の位置に、すなわち比が q になるように特殊化するため、singular になる。この問題は b*と c*の順序を変えたものとの一次結合を、singukarity が消えるように取ることで解消する。第二点は本質的な問題であって、スピン 1 の生成作用素どうしの結合に singularity が起きるという点である。これはスピン 1/2 のときにはなかった点であり、困難というよりは新しい減少ととらえるべきである。共形場理論では、作用素の積は sigularity を持つことが当たり前で、それは作用素の交換関係そのものであった。スピン 1 では生成作用素の間の交換関係が、スピン 1/2 のときに較べてより豊富な構造を持つととらえる。実際の計算を行なってみると sl(2)の共形場理論と同じ作用素積展開がでてくることがわかった。以上が格子模型に関する２５年度の成果である。つぎに量子トロイダル代数に関する２５年度の成果を述べる。有限次元のリー代数の表現論での話題のひとつに分規則の問題がある。量子トロイダル gl(n)代数について、部分代数としての gl(n-1)と gl(1)を考える分岐則を求めることが目標である。この問題を考えるにあたっての基本は三木による代数自己同型である。実は、１９８０年代に頂点作用素を用いて、量子トロイダル代数の表現が構成されたが、我々が研究課題として取り上げている表現とは、生成元の取り方が自己同型で取り代わっている。量子トロイダル代数の埋め込みの問題には表現の基底を組み合わせ論的に構成するために使う生成元ではなく、三木自己同型でまわした生成元を使う。生成元を母函数にまとめたものについて積を考えるのだが、形式的に無限和がでるため、それの意味をつける必要がある。生成元の間の２次関係式を使うと、最高ウエイト表現での完備化で収束するように撒き直すことができる。そのようにして埋め込んだ部分代数が表現空間にどのように作用するかが問題になる。この問題を解決するために Lusztig の braid 作用のトロイダル版を用いる。Lusztig の作用でウエイトを変化させてやると、部分代数の生成元の作用が組み合わせ論的に書ける。この結果を使って、いろいろな分規則を計算した。以上が２５年度の研究成果である

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 ９ 件）


[1] Boos, H., Jimbo, M., <u>Miwa, T.,</u> Smirnov, F., Hidden Grassmann structure in the XXZ model IV:CFT limit, Comm. Math. Phys., 299, no.3, 825-866, 2010.

[2] Feigin,B.,Jimbo,M., <u>Miwa, T.,</u> Gelfand Zetlin basis, Whittacker vectors and a bosonic formula for the sl(n+1) principal subspace, Publ. Res. Inst. Math., 47,2011, 535-551

[3] Jimbo,M., <u>Miwa, T.,</u> Smirnov,F., Fermionic structure in the sine Gordon model:form factor and null vectors, Nuclear Physics B. 852,2011,390-440

[4] Feigin,B.,Jimbo,M., <u>Miwa, T.,</u> Mukhin, E.,Quantum continuous gl(n):tensor products of Fock modules and Wn characters, Kyoto J. Math.,51,2011,237-364

[5] Feigin,B.,Jimbo,M., <u>Miwa, T.,</u> Mukhin, E.,Quantum toroidal gl(1) algebra :plane partitions, Kyoto J. Math.,52,2012,621-659

[6] Jimbo,M., <u>Miwa, T.,</u> <u>SmirnovF.,</u> <u>Fermionic screening operators in the sine-Gordon model,</u> arxiv1103.1534

[7] Jimbo,M., <u>Miwa, T.,,SmirnovF., Hidden Grassmann structure in the XXZ model V,sine-Gordon model, Lett. Math. Phys., 96, 325-365, 2011</u>

<u>[8]</u>Jimbo,M., <u>Miwa, T.,</u> <u>SmirnovF., Creation operators for the Fateev-Zamolodvhikov spin chain, arxiv 1402.6893,</u>

<u>[9]</u> Feigin,B.,Jimbo,M., <u>Miwa, T.,</u> Mukhin, Branching rules for quantum toroidal gl(n)


〔学会発表〕（計 ４ 件）

Representations of quantum continuous gl infinity, ICM satellite conference on Algebraic and Combinatorial approach in representation theory, August 15, 2010, Bangalore, India

Heinemann賞の受賞講演,2013年３月,アメリカ物理学会年会,Baltimore

Correlation functions in Integrable models, in Representation Theory ans applications to Combinatorics, Geometry, and Quantum Physics, International Conference dedicated to the 60th birthday of Boris Feigin, Moscow, December 13-19,2013

Construction of creation operators in Fateev-Zamolodchikov model, mathematical Physics:Past, Present, and Future, March 26-30, 2014, Euler Institute in St. Petersburg, Russia

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
三輪　哲二　　(MIWA Tetsuji )
京都大学・国際高等教育院・教授
研究者番号：１００２７３８６

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：