2版

様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ７ 日現在

機関番号： １４３０１
研究種目： 基盤研究(B)
研究期間： 2010～2014
課題番号： ２２３４００３３
研究課題名（和文） 力学系の分岐とくりこみの研究

研究課題名（英文） Research on the bifurcation and renormalization of dynamical systems

研究代表者
宍倉　光広（Shishikura, Mitsuhiro）

京都大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：７０１９２６０６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 12,700,000円

研究成果の概要（和文）：カオス的力学系、特に低次元複素力学系の分岐現象について研究した。放物型および半放物型不動点の分岐を研究するために、放物型および近放物型くりこみの理論を確立し、近放物型くりこみで不変な関数空間を発見した。さらに、力学系的座標の概念を導入し、それを上記の近放物型くりこみの不変関数空間と組み合わせることにより、無理的中立不動点を持つ２次多項式について、不動点の近くでの力学系的性質やHedgehogと呼ばれる不変集合の様子について調べた。また、２次元正則写像の半放物型不動点の構造とその分岐による吸引領域と不安定多様体の連続性について考察した.

研究成果の概要（英文）：We studied the bifurcation of chaotic dynamical systems, especially low dimensional complex dynamical systems. In order to study the bifurcation of parabolic or semi-parabolic fixed points, we established the theory of parabolic and near-parabolic renormalization, and found an invariant space of functions under these renormalizations. We introduced the notion of dynamical charts, and combining the invariant space of near-parabolic renormalization, we studied the dynamical properties and invariant sets (called hedgehogs) near irrationally invariant fixed points. We also studied the local structure and the bifurcation of semi-parabolic fixed point of two-dimensional holomorphic mappings, and obtained results on the continuity and discontinuity of the parabolic/attracting basins and unstable manifolds.

研究分野： 数物系科学

キーワード： 力学系　カオス　フラクタル　分岐　くりこみ

１．研究開始当初の背景

力学系の単純な平衡点や周期軌道の分岐については，既に確立した理論が存在し，有限次元,無限次元(偏微分方程式など)を問わず，広く応用されている.しかし，カオス的な力学系に関しては,周期軌道自体が既に無限個存在することが多く，重要な不変集合が細部に至るまで複雑なフラクタル的構造をもち，さらには大局的な回帰軌道の影響もあり，非常に錯綜した分岐現象を引き起こす.このような分岐現象についての詳細な研究は現在のところ,実および複素 1 次元の力学系で かなり進展しているが,その他については,部分的な結果しか得られていない.これらの研究の中での大きな発見として,分岐現象の普遍性が挙げられる．最初の例は,実 1 次元の単峰写像の周期 2 倍分岐列の集積に関する,収束速度の普遍性(個々の関数族によらず一定である)と，極限パラメータ(Feigenbaum パラメータ)での相空間での構造の普遍性・剛性(別々の関数族をとっても,極限パラメータでの力学系どうしは不変集合上 C^1 共役)である.特に後者については,一般のカオス的力学系どうしについては,位相共役であっても C^1 共役にならない(周期点での固有値の違いが原因)ことが多いことを考えると,非常に際だった特徴である．このような極限・臨界パラメータでの普遍性 現象の説明のために Feigenbaum らにより導入されたのが,「くりこみ」の概念である.すなわち,与えられた力学系に対し,重要な軌道が再帰するような領域を指定し,そこへの再帰写像を考慮することにより,新しい力学系を構成する方法である.(さらに必要に応じて再帰写像の定義域を拡大し，固定化された定義域に規格化する.)この新しい力学系を構成手法が「くりこみ」であり,分岐列の集積 する臨界パラメータなどでは,このくりこみが無限回構成できることが多い.一方,「くりこみ」自体はある種の力学系全体の空間(必然的に無限次元になる)の上での自己写像という意味で,メタ力学系になっており,このメタ力学系の不動点や不変集合,そしてそれらの双曲性などが,臨界パラメータでの力学系の性質,剛性や不変集合の構造などに反映することが知られている.この方針に基づき，Lanford は,単峰写像の周期倍分岐列に対応するくりこみに関して,精度保証された数値計算を通じてくりこみの不動点の存在と双曲性を証明し,周期倍分岐列に対する Feigenbaum のプログラムを完成させた.このほかにも,Rand らによる,円周上に臨界点をもつ写像族に関するくりこみや,Koch らによる,ハミルトン力学系の不変トーラス(KAM トーラス)の崩壊に対応するくりこみなどについて,その不動点の存在や双曲性などが,数値計算を応用した手法で証明されている.

２．研究の目的

本研究では,前期のような視点をさらに推し進め,(構造不安定な)分岐パラメータでの力学系をそれに近づく分岐列に相当するくりこみの列を通して研究することを目標とする.例えば,トーラス上の無理数回転の力学系については,回転数ベクトルを近似する有理数ベクトルの列に応じて,くりこみが定義でき,個々の力学系のそのものを研究する代わりに,くりこみ写像の列を考えることによって,元の力学系の性質を引き出すことができる.元の力学系の微細な相空間の構造 は,くりこまれた力学系のより大きな構造として拡大されると共に，パラメータを変化させたときの微細な分岐構造も,くりこまれた力学系の大きなスケールの分岐として理解できる．従って,メタ力学系としての(力学系の空間の上の)アプリオリ評価や双曲性などがわかれば,それを応用して個々の力学系の性質についての結論を引き出すことができる.従来のくりこみ理論は,同じタイプのくりこみを無限に

繰り返すことができる状況を中心に研究されてきた.それは,くりこみ写像の不動点の 問題としてとらえられるが,本研究の特色としては,異なるタイプのくりこみ(特に非有界型と呼ば れるもの)が組み合わされて無限回定義できる場合を取り扱うことを目標とする.これは,くりこみ 写像について言えば,複数の定義域をもつくりこみ写像全体の双曲的不変集合の研究に対応する.

具体的な対象としては,既に研究の進んでいる実および複素の1次元力学系,2次元以上の複素力学系,ハミルトン力学系の崩壊する不変トーラスでのくりこみなどを予定している.複素の1次元力学系では,近年,稲生・宍倉による近放物型くりこみと,Kahn-Lyubich によるプリミティブ型くりこみについて,ある種のアプリオリ評価が与えられ,大きな進展があった.しかし,これらのタイプのくりこみにカバーされないくりこみ型もあり,また,2 種類のアプリオリ評価が与える関数空間に 多くの隔たりがあるため,これらのタイプが混合される場合に,共通の評価は得られていない.本研究の一つの目標として,混合型を取り扱えるより広い枠組みのくりこみ不変関数空間を構成する.このような関数空間は実 1 次元力学系のくりこみや剛性の問題にも応用できると期待される.

このような分岐現象に付随したくりこみの研究は種々の力学系の問題への応用が期待される.重要なものとして,上に述べたような分岐パラメータ列のスケーリング則の普遍性や,臨界パラメータでの相空間の構造の普遍性などがあるが,それ以外にも,複素力学系における双曲的系の稠密性の問題や,マンでルブロート集合の局所連結性の問題,回転型力学系の剛性問題,体積保存系のカオス的集合の構造などへの応用を研究する.

３．研究の方法

力学系(特にカオス的力学系)の分岐現象では,再帰的・カオス的な軌道の引き起こす特有の困難さが有り,いろいろな分岐が単独で起こるのではなく,複数の分岐が連続してあるいは絡み合って起きることが多く,その様子に関する網羅的な研究はないと言ってよい.本研究を進める上では,様々な分岐現象に関する情報を集約し,その中でも核となる分岐現象(周期倍分岐,放物型分岐,ホモクリニック分岐など)に焦点を当て,その中で可能な場合には関連する「くりこみ」操作を定義し,各種臨界パラメータでのスケール則,剛性,相空間での構造などを研究する.このためには,複素解析的手法,変分法的手法,エルゴード理論的な手法,精度保証付きの数値計算などを組み合わせて用いる.そのためには,力学系関係の研究集会に出席し,最新の研究に関する情報を収集すると共に,関連する研究者(後述)を招聘または訪問して共同研究を行っていく.

本研究では,力学系関係の研究集会・セミナー開催すると共に,海外の研究者とも交流しながら,力学系の分岐問題・くりこみなどの研究を行う.

４．研究成果

カオス的力学系、特に低次元複素力学系の分岐現象について研究した。放物型および半放物型不動点の分岐を研究するために、稲生と宍倉は放物型および近放物型くりこみの理論を確立し、近放物型くりこみで不変な関数空間を発見した。この関数空間は無理的中立不動点をもつ複素力学系の研究で既に多くの応用があり、例えば Buff-Cheritat はジュリア集合が正のルベーグ測度をもつ多項式を構成し、長年の未解決問題に決着をつけた。本年度は近放物型くりこみの不変空間を許容する放物型への近さの具体的評価を試み、具体的数値を与えるための予備的な評価

を得た。

さらに、力学系的座標(dynamical charts)の概念を導入し、それを上記の近放物型くりこみの不変関数空間と組み合わせることにより、無理的中立不動点を持つ２次多項式や不変関数空間の元について、不動点の近くでの力学系的性質や Hedgehog と呼ばれる不変集合の様子について調べた。特に、この不変集合が Hair と呼ばれる連続曲線の和集合とかけることを証明した。力学系的座標とは、力学系の作用する空間をいくつかの標準的な空間（モデル空間）で覆い、力学系の作用自身をモデル空間の間の標準的写像（モデル写像）で表現するというもので、特に無理数回転に対応する力学系のように、くりこみが作用している場合、力学系的座標の組みの無限列が構成され、くりこみが一つの力学系的座標からその細分への移行の規則を与えることになり、今後の様々なクラスの無限回くりこみ可能力学系の相空間の記述にも応用されると期待される。

また、また、複素力学系の擬等角変形のスケール極限をを１次元樹木とその上の区分的線型写像によって記述し、逆に１次元樹木上の区分的線型写像から擬等角手術によって有理関数を構成する方法を与えた。

その他、稲生は Mandelbrot 集合の反正則 2 次多項式族における類似である tricorn と呼ばれる集合に対して，奇数周期の双曲成分に集積する外射線が自明な場合を除いて１点には収束しないことを示した (Sabyasachi Mukherjee 氏と共同). 複素 2 次元における歪積の力学系ではファイバージュリア集合の不連続性が saddle connection から生じる. この幾何的極限を，1 次元の parabolic implosion 理論の考え方を流用して，サドルのファイバー方向の線形化座標を用いて記述した(中根静男氏と共同).

上田は、Bedford と共同で、高次元複素力学系の問題を多変数関数論の立場から研究し、特に２次元正則写像の半放物型不動点の構造とその分岐による吸引領域と不安定多様体の連続性について考察した.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　2　件）

Inou, Hiroyuki; Kiwi, Jan Combinatorics and topology of straightening maps, I: Compactness and bijectivity. Adv. Math. 231 (2012), no. 5. 査読あり

Inou, Hiroyuki Extending local analytic conjugacies. Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), no. 1, 331-343.。査読あり

〔学会発表〕（計　7　件）

Mitsuhiro Shishikura, “Jakobson's theorem via Yoccoz puzzles and the measure of stochastic parameters”, Ergodic Theory and Dynamical Systems: Perspectives and Prospects University of Warwick, 16-20 April 2012 (talk 4/16) 招待講演

Mitsuhiro Shishikura, “Straight brush model for irrationally indifferent fixed points of holomorphic functions”, Workshop on Non-uniformly Hyperbolic and Neutral One-dimensional Dynamics National University of Singapore, 23 - 27 Apr 2012 (talk 4/24) 招待講演

Mitsuhiro Shishikura, “Jakobson's theorem via Yoccoz puzzles and the measure of stochastic parameters”, ICTP-ESF School and Conference in Dynamical Systems The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy, School 5/21-6/1, Conference 5/4-8, 2012 (talk 6/6) 招待講演

Mitsuhiro Shishikura, “Stellite renormalization of quadratic polynomials”, Workshop on Holomorphic Dynamics - MLC Status and Quo Vadis? - Søminestationen Holbæk, Denmark, September 27 – 30 2012 (Talk 9/28) 招待講演

Mitsuhiro Shishikura, “Renormalization in Complex Dynamics”, 復旦大学交流会 京都大学大学院理学研究科数学教室 2012/12/8-12 (Talk12/10) 招待講演

Mitsuhiro Shishikura, “Satellite renormalization for complex quadratic polynomials”, 複素力学系の新展開 (New developments in complex dynamical systems)数理解析研究所 111 号室, 2012 年 12 月 10 日ー14 日 (Talk 12/12)

Mitsuhiro Shishikura, “複素力学系の衛星型くりこみについて”, 冬の力学系研究集会
日本大学軽井沢研修所 2013/01/11--14 (talk 1/12)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
○出願状況(計 0 件)

○取得状況(計 0 件)

〔その他〕
ホームページ等：なし

６．研究組織
(1)研究代表者
宍倉 光広 (SHISHIKURA, Mitsuhiro)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：70192606

(2)研究分担者
上田 哲生 (UEDA, Tetsuo)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：10127053

(3)連携研究者
稲生 啓行 (INOU, Hiroyuki)
京都大学・大学院理学研究科・講師
研究者番号：00362434