

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 1 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2014

課題番号：22340035

研究課題名(和文) 測地流の転移作用素と半古典ゼータ関数の研究

研究課題名(英文) Study of transfer operator for geodesic flow and the semiclassical zeta function

研究代表者

辻井 正人 (Tsujii, Masato)

九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：20251598

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 8,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では典型的なカオス的挙動を示す連続力学系(アノソフ流、特に負曲率空間における自由粒子の運動を記述する測地流)に対して、付随する転送作用素のスペクトルを分析することで軌道の統計的性質を精密に分析する方法を研究した。最大の研究成果は負曲率多様体上の測地流(またはより一般の接触アノソフ流)に対し、転送作用素の生成作用素が離散的なスペクトルを持ち、それらが複素平面上の幾つかの虚軸に平行な帯状領域に含まれるという事実を示したことである。加えて、力学系のゼータ関数についても対応する結果を得た。これは従来に関係分野の研究を大きく前進させるものである。

研究成果の概要(英文)：In this research project, we studied dynamical systems exhibiting typically chaotic behavior (especially, the geodesic flow which describes the motion of free particle on negatively curved space) and develop a theory to understand their fine statistical properties by analyzing spectral properties of associated transfer operators. The main result obtained in this research project proves that, for geodesic flows on negatively curved manifolds (or more generally for contact Anosov flows) the generator of transfer operators has discrete spectrum and has a band structure, that is, the discrete eigenvalues are contained in several bands parallel to the complex plane. Further we obtained the corresponding results on dynamical zeta functions. This is a significant progress in the related fields.

研究分野：力学系理論

キーワード：力学系 測地流 カオス 転送作用素 スペクトル エルゴード理論

1. 研究開始当初の背景

双曲的な離散力学系においては相関の指数的減衰などの精密な統計的な性質の研究は進んでいたが、双曲的連続力学系(例えば、アノソフ流)における対応する研究は立ち遅れていた。これは双曲的な流れにおいて流れの方向自体は拡大も縮小もされない中立的な方向であり、力学系の分類から言えば部分双曲系と呼ばれるものになるからである。その中で負曲率多様体の測地流を含む接触アノソフ流と呼ばれるクラスのアノソフ流については Dolgopyat や Liverani によって相関の指数的減衰が証明され、さらに申請者によって、転送作用素のスペクトルギャップが示されていた。特に後者においては流れの方向の周波数に応じて関数を分解し、高周波の極限を考えることが本質的であり、その上では転送作用素の解析が準古典解析の問題と類似することが指摘されていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は双曲的な流れ、特に、接触アノソフ流と呼ばれるクラスのアノソフ流について関数解析的な手法(特に準古典解析)を応用することによって流れに対応する転送作用素の精密な分析を行うことである。特に、前項の最後に挙げた転送作用素の問題と準古典解析の問題の類似を研究することで、転送作用素の準古典解析というべき方法を確立することが目的である。

3. 研究の方法

研究は力学系理論と準古典解析の双方にまたがるため、準古典解析の専門家である F. Faure 氏 (Fourier 研究所、France) の協力を得て、共同研究を進めた。

接触アノソフ流に対応する転送作用素を研究する上で重要なのは関数を流れの方向の周波数(帯)で分解することである。ただし、コンパクトな多様体上であるのでこの分解は完全にはできない。これは基本的にはあまり本質的なことではないが、技術的には多くの困難を引き起こす。そこで私と Faure 氏はまず接触アノソフ流の単純化されたモデルとして前量子アノソフ写像と呼ばれるアノソフ微分同窓の  $U(1)$  拡張を導入し、それについて精密な議論を構築した。これが以下の発表論文の 1 である。

次に、この研究成果をもとに接触アノソフ流の場合の問題を議論して、前量子アノソフ写像の場合の結果を拡張することを目指した。これが発表論文の 2 およ

びプレプリント

“The semiclassical zeta function for geodesic flows on negatively curved manifolds” (with F. Faure) arXiv:1311.4932 (投稿中) である。

4. 研究成果

主な研究成果は論文 1, 3 にある。論文 2 においては一般の数学者向けの解説を行っている。主な結果を書くと

- 前量子アノソフ写像の転送作用素の各フーリエ成分への制限は離散的なスペクトルを持ち、高周波の極限においてそれらは幾つかの原点を中心とする同心環状領域に含まれる。特に最も外側の環状領域に含まれる固有値の数については周波数の(次数が多様体の次元から定まる)多項式のオーダーになるという、いわゆる Weyl の法則の類似が成り立ち、また、固有値の偏角の分布は漸近的に等分布に近づく。
- 接触アノソフ流に対する転送作用素の生成作用素は離散スペクトルを持ち、虚部を無限大にする極限において固有値は幾つかの虚軸に平行な帯状領域に含まれる。さらに一番右側の帯状領域に含まれる固有値の密度は虚部の周波数の(次数が多様体の次元から定まる)多項式のオーダーになるという、いわゆる Weyl の法則の類似が成り立つ。
- 前項で特に不安定方向のヤコビアン  $\frac{1}{2}$  乗という「半古典ウェイト」をつけた半古典転送作用素を考えると、一番右側の帯状領域は虚軸そのものになり、虚軸の周辺に固有値が集中するという現象が起きる。このことからセルバーグゼータ関数の拡張である半古典ゼータ関数の零点が虚軸の周りに集中し、その両側に零点がない領域がそんざいするという、古典的なセルバーグゼータ関数に関する結果の拡張が得られる。

さらにこれらの背景として

- 準古典解析の手法が流れの転送作用素の解析に非常に自然でかつ有効であることを示した。
- 上記の一番外の環状領域(または一番右の帯状領域)への転送作用素のスペクトル制限は流れの量子化とみなせることを示した。

ことは今後の関係分野の研究にとって興味深い対象を提示しており重要であると考えられる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 5 件)

- 1 F. Faure, M. Tsujii “Prequantum transfer operator for symplectic Anosov diffeomorphism” (with F. Faure), *Asterisque*, (accepted)
- 2 M. Tsujii “Geodesic flows on negatively curved manifolds and the semi-classical zeta function” (Japanese), *Sugaku* 66(2014), no.2, 113-134
- 3 F. Faure, M. Tsujii “Band structure of the Ruelle spectrum of contact Anosov flow”, *C.R. Math. Acad. Sic. Paris* 351 (2013), no. 9-10, 385-391
- 4 M. Tsujii, “Contact Anosov flows and the Fourier-Bros-Iagolnitzer transform”, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 32 (2012), no 6
- 5 M. Tsujii, “Quasi-compactness of transfer operators for contact Anosov flows”. *Nonlinearity* 23 (2010), no. 7

〔学会発表〕(計 11 件)

1. “拡大的半流における素周期軌道定理の誤差項の評価”, 2014年度冬の力学系研究集会(軽井沢、2015年1月12日)
2. ”Resonances for geodesic flows on negatively curved manifolds”, 国際数学会議(ICM2014 ソウル)での招待講演, (韓国、ソウル、2014年8月14日)
3. ”Spectrum of transfer operators for expanding semi-flows.”, ICM 2014 サテライト会議 ”Dynamical Systems and Related Topics” (韓国、大田), (2014年8月11日)
4. ”Spectrum of geodesic flow on negatively curved manifold.”, *Hyperbolicity and dimension*, CIRM (フランス、マルセイユ、2013年12月5日)
5. ”Prequantum Anosov maps”, ICTP-ESF School-Conference in Dynamical Systems,

ICTP (イタリア、トリエステ、2012年6月8日)

6. ”Spectrum of transfer operators for geodesic flows on negatively curved manifolds”, Workshop on Non-uniformly Hyperbolic and Neutral One-dimensional Dynamics, NUS (Singapore), (シンガポール、2012年4月25日)
7. ”Geodesic flows on negatively curved manifolds and Semi-classical analysis”, 2011年度 偏微分方程式姫路研究集会(姫路), (2012年2月22日)
8. ”前量子アノソフ写像のスペクトル”, 2011年度冬の力学系研究集会(軽井沢), (2012年1月7日)
9. M. Tsujii, ”Spectrum of transfer operators”, The workshop at Peyresq ”Spectral gap in dynamical systems, number theory and PDEs” (Peyresq, France) (2011年5月31日)
10. ”Contact Anosov flows and the FBI transform”, The workshop ”Hyperbolic Dynamical Systems in the Sciences” (Corinaldo, Italy) (2010年6月2日)
11. ”Functional analytic method in smooth ergodic theory” (3回) in the program ”Dynamics and PDE’s”, Mittag-Leffler Institut (Djursholm, Sweden) (2010年1月26日、2月2日)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<https://tsujimasato.wordpress.com>

6. 研究組織  
(1)研究代表者

辻井 正人 (TSUJII, Masato)  
九州大学・大学院数理学研究院・教授  
研究者番号：20251598

(2)研究分担者

(3)連携研究者