

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 15 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2014

課題番号：22500014

研究課題名(和文)表現を通じた、空間や図形の計算的構造及び関連したフラクタル等の構造の研究

研究課題名(英文) Studies on representation-based computational structures of spaces and figures, and on related structures like fractals

研究代表者

立木 秀樹 (Tsuiki, Hideki)

京都大学・人間・環境学研究科(研究院)・教授

研究者番号：10211377

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：グレイコード埋め込みはボトムを含む無限文字列を用いた実数の表現であり、IM2-マシンはボトム入り文字列を操作する計算概念である。Proper dyadic subbase はグレイコード埋め込みを位相空間に一般化した構造である。本研究では、proper dyadic subbase に対応するIM2-マシンの有限時間での入出力状態を表現するドメイン構造を考え、その性質を調べた。また、proper dyadic subbase を導出する力学系である exact full-folding map や、グレイコード埋め込みによる展開をストリーム入出力する形式計算についても調べた。

研究成果の概要(英文)：Gray-code embedding is a representation of real numbers with sequences containing bottoms and an IM2 machine is a machine which operates on bottomed sequences. Proper dyadic subbase is a generalization of Gray-code embedding to topological spaces. We studied domain structures which correspond to finite states of IM2-machines that operate according to dyadic subbases. We also studied exact full-folding maps which are dynamical systems that derive proper dyadic subbases, and a stream calculus which input and output Gray-code embedding.

研究分野：理論計算機科学

キーワード：実数計算 ドメイン理論 位相空間論 力学系

1. 研究開始当初の背景

計算概念を実数のような連続な空間に広げる試みは計算可能性解析学と呼ばれ、プログラミング言語理論、数理論理学、構成的数学、ドメイン理論、解析学など多くの分野と関連しながら研究が行われている。計算可能性解析学では、実数などの空間上に計算概念を導入するのに、無限記号列を用いた冗長な表現と無限列を入出力するマシンを用いる TTE (Type-2 Theory of Effectivity) や、ドメインという近似構造の数学的モデルを用いるものが標準的である。それに対し研究代表者は、ボトムを高々一つ含む無限記号列の空間への実数空間の埋め込み(グレイコード埋め込み)と、その拡張された無限列を入出力する非決定性多ヘッドマシン (IM2-マシン) を導入し、それらが実数空間上に TTE と同等の計算概念を導くことを示した。

その後、この研究を基礎として二つの方向の研究を行って来た。一つは、グレイコード埋め込みの、可分距離空間などのより一般的な位相空間への拡張である。グレイコード埋め込みを一般化して計算の基礎としてふさわしい構造 (proper dyadic subbase, independent dyadic subbase など) を定義し、その構造がどの位相空間に対して存在し、どのような近似の構造を導出するのかといったことを調べた。もう一つは、ボトム入り文字列を入出力する計算の機構についてである。IM2-マシンやその他のボトム入り文字列を入出力する仕組みのプログラミング言語による実装を考え、その表現能力について調べた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、連続な空間上での計算に関する理解を深めること、特に、実数などの連続な構造を持つ空間や図形に対するボトムを含む無限文字列を用いた表現と、その上での計算の仕組みについてこれまで行ってきた研究を進展させ、この両者の関係について調べることである。また、こうした表現を導出する位相的構造、力学系の構造、フラクタル(すなわち無限再帰的)構造などの数学的な構造についても研究を行う。

3. 研究の方法

(1) 位相空間 X の proper dyadic subbase は、 X のドメイン T への埋め込みを導出する。一方で、IM2 マシンを用いた計算の過程には T の要素の一部だけしか現れず、それに対応した T の部分ドメインが考えられる。この部分ドメインの構造の中には、空間や proper dyadic subbase の計算的な性質が現れているのではないかと考えられる。大学院生の塚本靖之氏とともに、位相空間の性質

や proper dyadic subbase の性質と、それに対応する部分ドメインの構造の関係について調べた。

(2) Proper dyadic subbase が計算に用いることのできる構造であるためには、その上に何らかの無限再帰的な構造が必要である。グレイコード埋め込みはテント関数による力学系の旅程として定義されるが、計算に用いることのできる旅程の概念をコンパクト距離空間に一般化した (exact) full-folding map の概念を考え、特に、2次元ディスク上の full-folding map について調べた。

(3) 実数に対するアルゴリズムを記述するためには、IM2 マシンにボトムを含んだ文字列が入力として与えられた時の処理についても記述が必要である。一方で、記述される関数が連続ならば、ボトムを含まない文字列に対する値が決まれば、それをもとに、ボトム入り文字列に対する値も定まるはずである。大学院生の寺山慧氏とともに、そのような形で値を求めながら、ストリーミング的にボトム入り文字列を入出力する計算を考え、その性質を調べた。

本研究を遂行するにあたり、京都産業大学の山田修司教授、静岡大学の田村春外教授、Darmstadt 工科大学の Klaus Keimel 教授など、内外の関連分野の研究者と有益な議論を行った。力学系に関しては、京都大学や他大学の力学系に関する専門家を訪問したり研究集会で会うなどして貴重な意見をいただいた。期間中に、位相空間論、プログラミング言語理論、力学系、ドメイン理論、計算可能性解析学、構成的数学、アルゴリズム理論など、多くの研究集会に参加して発表を行い、多くの研究者と議論を行った。

4. 研究成果

(1) 位相空間 X の Proper dyadic subbase は、開集合のペアのリストとして表現される X の部分基で、ある性質を満たしたものである。Proper dyadic subbase は位相空間の $T = \{0, 1, \dots\}$ の無限列による表現を導出する。Proper dyadic subbase によって定義された T の無限列を入出力する IM2 マシンの有限時間の入出力状態となる T の有限列全体からイデアル完備化で作られるドメイン DS を考える。この時、ハウスドルフ空間 X の満たす分離(的)公理と DS の性質の関係として、 X が strongly non-adhesive なら DS が極小極限要素集合を持つこと、 X が正規空間なら DS の極小極限要素集合の中に X が埋め込まれること、 X がコンパクト空間なら DS の極小極限要素集合が X と一致することを示した。また、出力を飛ばされたセルにはどんな順序でもその後の出力を許す様に IM2 マシンの動作を変更した時に対応するドメインは

スコットドメインになることを示した。さらに、proper より強い strongly proper という性質を考え、Strongly proper dyadic subbase では、これら2つのドメインは一致し、 S のリストの順序をどのように入れ替えても DS がスコットドメインとなるような S は strongly proper であることなどを示した。また、strongly independent な dyadic subbase の概念を定義し、strongly independent dyadic subbase を持つハウスドルフ空間の存在を示した(以上、塚本靖之氏との共同研究)。また、任意の separable metrizable space が proper dyadic subbase を持つことを示した(大田春外、山田耕三氏との共同研究, arXiv にプレプリントがある)。

Proper dyadic subbase は、空間を2つに切る、切り方の列としての空間の表現である。これは2進展開を一般化したものであり、空間の表現として自然であるが、そのまま計算に用いることはできない。一方、 DS は計算的な構造であり、Proper dyadic subbase により自然に計算的な構造が導かれる。特に、 X がコンパクトな時には、全ての DS の無限上昇列が X の点を表示するような X の表現となる。このように、proper dyadic subbase は表現としての自然さと計算可能性の両方を保持しており、この概念を通じて位相構造と計算との関係についてさらなる研究を進められると考えている。

(2) X はコンパクト距離空間であり、 X_0 と X_1 はお互いに exterior である X の正規部分集合とする。 X 上の連続写像 f であり、 f の $cl X_0$, および $cl X_1$ への制限が X の上への同相写像となる時に f は full-folding map であると定義する。full-folding map の力学系は、 X 上に旅程の概念を導出する。各点の旅程が異なるような f を exact full-folding map と定義する。exact full-folding map は、空間上に proper dyadic subbase を生成し、空間に $0,1$ 文字列による表現とボトム入り文字列による表現の両方を導出する。基本区間上の exact full-folding map は、conjugate なものを同一視するとテント写像だけしか存在しない。2次元基本ディスク上で full-flipping map のなす力学系,特に、acute という性質を満たす full-folding map のなす力学系について調べた。2次元基本ディスク上の acute な full-folding map は、境界への制限により単位閉区間上の core を持つ unimodal map を導出すること、および、逆に、単位閉区間上の任意の unimodal map の core は、2次元基本ディスク上の acute な full-folding map に拡張できることを示した。また、複素力学系との関係について研究を行い、2次元基本ディスク上の full-folding map で $cl X_0$ への制限、および $cl X_1$ への

制限が正則なものは、リーマン球面上の有理係数の2次有理関数と semi conjugate であることが分かった(山田修司氏、竹内泉氏との共同研究)。unimodal map や複素力学系との関係を通じて、proper dyadic subbase の興味深い例が多く得られ、再帰的な構造が見えてきた。再帰的な構造をもつ proper dyadic subbase に関する研究を、これらを基に進めていけると考えている。

(3) ボトム入り文字列を入出力する形式計算 XPCF を定義した。この計算は、文字列に対するアクセスとして、通常のストリームアクセスに加えて1文字とばしたアクセスをもち、拡張された条件分岐を基本演算としてもつ。XPCF における関数定義は、ボトムを含まない文字列だけに対して行われ、拡張された条件分岐の機構により、ボトムを含む文字列に対してストリームアクセスが可能となる。XPCF で実数上の足し算、掛け算といった基本的な関数を表現し、XPCF がドメイン意味論に対して adequacy の性質を満たすこと、XPCF は PCF に PIF を加えた計算と PCF の型の上では表現能力が等しく、ボトム入り文字列型に対しては、意味領域の計算可能な要素が全て表現できることなどを示した(寺山慧氏との共同研究)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

Yasuyuki Tsukamoto and Hideki Tsuiki. Properties of domain representations of spaces through dyadic subbases, Mathematical Structures in Computer Science, to appear, 査読有.

Hideki Tsuiki and Yasuyuki Tsukamoto. Domain Representations Induced by Dyadic Subbases, Logical Methods in Computer Science Vol. 11(1:17), pp.1-19 (2015), 査読有, DOI: 10.2168/LMCS-11(1:17)

Kei Terayama and Hideki Tsuiki. A Stream Calculus of Bottomed Sequences for Real Number Computation. Electronic Notes Theoretical Computer Science 298. pp.383-402 (2013), 査読有, doi:10.1016/j.entcs.2013.09.023

Hideki Tsuiki. Unimodal maps as boundary restrictions of two-dimensional full-folding maps. Topology and Its Applications 159. pp.1266-1275 (2012), 査読有, doi:10.1016/j.topol.2011.11.002

〔学会発表〕(計 22 件)

Hideki Tsuiki. Domain representations of spaces derived from dyadic subbases. JAIST Logic Workshop Series 2015: Constructivism and Computability (Tutorial), 2015年3月2日 -- 2015年3月6日, Shiinoki Cultural Complex, Kanazawa.

Hideki Tsuiki. Bottomed stream representations derived from dynamical systems. Continuity, Computability, Constructivity -- From Logic to Algorithms (招待講演), 2014年9月15日 -- 2014年9月19日, Ljubljana, Slovenia.

Yasuyuki Tsukamoto and Hideki Tsuiki. Strong properness of dyadic subbases. Eleventh international conference on computability and complexity in analysis, 2014年6月21日~2014年6月24日, Darmstadt, Germany.

Hideki Tsuiki. Dyadic subbases derived from dynamical systems. Correctness by Construction, CORCON Workshop, 2014年3月24日-2014年3月27日, Genoa, Italy.

Hideki Tsuiki. Admissible domain representations induced by proper dyadic subbases. International Conference on Topology and Geometry 2013(招待講演). 2013年9月2日--2013年9月6日, Shimane University, Matue.

Kei Terayama and Hideki Tsuiki. A Stream Calculus of Bottomed Sequences for Real Number Computation" Mathematical Foundations of Programming Semantics Twenty-ninth Conference. 2013年6月23日~2013年6月25日, Louisiana, USA.

Hideki Tsuiki. Kneading Theory via Two-Dimensional Full-Folding Maps. 27th SUMMER TOPOLOGY and its APPLICATIONS. 2012年06月25日--2012年06月28日, Mankato, USA.

Hideki Tsuiki. Domain Representations induced by Dyadic Subbases. Continuity, Computability, Constructivity -- From Logic to Algorithms. 2012年05月29日--2012年06月02日, Trier, Germany.

Hideki Tsuiki. Computation over Topological Spaces via Embeddings in Streams with a Bottom. The 5th International Workshop on Data-Mining

and Statistical Science and 7th Workshop on Learning with Logics and Logics for Learning (招待講演), 2011年3月30日, Osaka University, Osaka.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

6. 研究組織

(1) 研究代表者

立木 秀樹 (TSUIKI, Hideki)
京都大学・人間・環境学研究所・教授
研究者番号: 10211377

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし

()
研究者番号:

(4) 研究協力者

山田 修司 京都産業大学理学部教授
大田 春外 静岡大学教育学部教授
竹内 泉 産業技術総合研究所研究員
塚本 靖之 京都大学 人間・環境学研究所博士後期課程学生
寺山 慧 京都大学 人間・環境学研究所博士後期課程学生