様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５ 月　１５ 日現在

機関番号：32665
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2010～2012
課題番号：22500018
研究課題名（和文）
有限集合を生成する禁止部分グラフ
研究課題名（英文）
Forbidden subgraphs generating a finite set
研究代表者
斎藤　明（SAITO AKIRA）
日本大学・文理学部・教授
研究者番号：90186924

研究成果の概要（和文）：与えられた連結グラフの集合 $\mathcal{F}$ に対し、グラフ G が $\mathcal{F}$ に属するどのグラフも誘導部分グラフに含まないとき、G は $\mathcal{F}$-フリーであるとよばれる。この $\mathcal{F}$ は禁止部分グラフとよばれる。本研究は k-連結な $\mathcal{F}$-フリーグラフ全体が有限集合を成すような集合 $\mathcal{F}$ を調べた。結果として、$|\mathcal{F}|\leqq 2$, $k\leqq 6$ の場合、および $|\mathcal{F}|=3$, $k\leqq 2$ の場合に所望の $\mathcal{F}$ を決定した。また $|\mathcal{F}|=3$, $k=3$ の場合についても、部分的な決定を行った。

研究成果の概要（英文）：For a set of connected graphs $\mathcal{F}$, a graph G is said to be $\mathcal{F}$-free if G does not contain any member of $\mathcal{F}$ as an induced subgraph.The set $\mathcal{F}$ is often referred as forbidden subgraphs. In the research, we have studied the property of the forbidden subgraphs $\mathcal{F}$ such that the set of k-connected $\mathcal{F}$-free graphs is a finite set. We have given a complete characterization of $\mathcal{F}$ in the cases of $|\mathcal{F}|\leqq 2$ and $k\leqq 6$ and of $|\mathcal{F}|=3$ and $k\leqq 2$. We have also obtained a partial characterization in the case of $|\mathcal{F}|=3$ and k=3.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
2012 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：総合領域
科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎
キーワード：グラフ理論・禁止部分グラフ・誘導部分グラフ・有限集合・連結度

１．研究開始当初の背景

与えられた連結グラフ H について、グラフ G が H に同形なグラフを誘導部分グラフに含まないとき、G は H-フリーグラフである、あるいは G において H は禁止されている、という。また連結グラフから成る集合 $\mathcal{F}$ に対して、G が $\mathcal{F}$ の全ての要素 F について F-フリーとなるとき、G は $\mathcal{F}$-フリーグラフである、あるいは G において $\mathcal{F}$ は禁止されているという。特定の連結グラフの集合 $\mathcal{F}$ について、$\mathcal{F}$-フリーグラフが満たす

性質を調べる研究は、禁止部分グラフの研究とよばれている。禁止部分グラフの研究はグラフ理論における大きなテーマの１つである。

禁止部分グラフの研究においては、有限個の例外が現れることが多い。例えば 1995 年に Faudree らは、2-連結グラフのクラスにおいて $K_{1,3}$, Z_3 という２つのグラフを禁止することを考え、位数 10 以上の $\{K_{1,3}, Z_3\}$-フリーグラフはハミルトンサイクルを持つことを証明した。実際ハミルトンサイクルを持たない位数 9 の 2-連結な$\{K_{1,3}, Z_3\}$-フリーグラフが存在するので、彼らの定理における「位数10 以上」という条件は本質的である。一方位数９以下のグラフは有限個しか存在しないので、有限個の例外を除けば、2-連結な$\{K_{1,3}, Z_3\}$-フリーグラフはハミルトンサイクルを持つ。

対象となる命題に反例があっても、その反例の個数が有限個であれば、それらを持って命題を否定するよりも、むしろ有限個の例外を除いて命題を肯定した方がより多くの知見を得る。このような立場から、禁止部分グラフの研究では有限個の例外を認めることが多い。しかしここに１つ落とし穴がある。もし $\mathcal{F}$-フリーグラフ全体の成す集合が有限集合になるとどうなるだろうか。調べたいグラフの性質 P について、「有限個の例外を除き k-連結な $\mathcal{F}$-フリーグラフは性質 P を満たす」という命題を考える。もし k-連結な $\mathcal{F}$-フリーグラフ全体が有限集合になってしまうと、それら全てを「有限個の例外」と宣言することにより、性質 P が何であれ、命題は真となってしまう。逆に言えば、この禁止部分グラフの集合 $\mathcal{F}$ は特定の性質 P に何ら知見を与えない。このような $\mathcal{F}$ は禁止部分グラフ研究の「雑音」となり、研究全体の視野を不明瞭にしてしまう。近年の禁止部分グラフの研究では、禁止する部分グラフの種類が多様になってきており、有限集合を生成する禁止部分グラフの集合が及ぼす悪影響が無視できないものとなりつつある。

２．研究の目的

前項で述べた背景の下、本研究は有限集合を生成するような禁止部分グラフを調べることを目的とした。具体的には、正整数 k といくつかの連結グラフから成る集合 $\mathcal{F}$ について、k-連結な $\mathcal{F}$-フリーグラフ全体の成す集合が有限集合となるとき、この集合 $\mathcal{F}$ の性質を調べた。特に $|\mathcal{F}|$ が小さいとき、すなわち禁止する部分グラフの個数が少ないとき、$\mathcal{F}$ を決定することを目指した。

３．研究の方法

まず初めに、誘導部分グラフの構造が簡単なグラフから成るグラフの無限列を作り出すことを目指した。与えられた正整数 k に対して、k-連結な $\mathcal{F}$-フリーグラフの集合 $\mathcal{H}$ が有限集合になったと仮定する。そして k-連結なグラフから成るグラフの無限列を構成する。$\mathcal{H}$ は有限集合なので、この無限列の要素の全てを含むことはできない。従ってこの無限列には $\mathcal{F}$-フリーでないもの G が存在する。G は $\mathcal{F}$-フリーではないので、$\mathcal{F}$ のどれかの要素を誘導部分グラフに含む。もし G の誘導部分グラフの構造が簡単ならば、この事実から $\mathcal{F}$ の１つの要素に関する情報を得る。無限列を数多く構成すれば、それだけ $\mathcal{F}$ の各要素に関する情報を得ることができる。特に $|\mathcal{F}|$ が小さい場合には、$\mathcal{F}$ の特定に至る。これが研究の前半のシナリオである。

このようなグラフの無限列には、多くのものが考えられる。例として位数が十分大きい完全グラフを考えよう。完全グラフの誘導部分グラフは完全グラフなので、$\mathcal{F}$ は完全グラフを１つ含まなければならないことが分かる。また完全２部グラフの誘導部分グラフも完全２部グラフに限るので、連結度の条件を満たすように注意深く設定すれば、$\mathcal{F}$ は完全２部グラフを含まなければならないことも分かる。完全グラフであると同時に完全２部グラフでもあるグラフは２頂点の完全グラフ K_2 しか存在しないので、K_2 を含まない仮定の下では $\mathcal{F}$ の要素の種類を２つ求めたことになる。このような議論を繰り返して、$\mathcal{F}$ の特定もしくは情報抽出を進める。

誘導部分グラフの構造が単純なグラフには、完全グラフや完全２部グラフ以外にも様々なものがある。これらから無限列を構成し、それを用いて $\mathcal{F}$ に関する情報を蓄積する。もちろん禁止部分グラフの集合 $\mathcal{F}$ が大きくなると、集めた情報が $\mathcal{F}$ の中の異なる要素により分散して満たされる可能性が増えてくるため、特定が難しくなる。また連結度 k が高いときには、それに応じて構成する無限列も連結度の高いグラフのみで作らなければならなくなるため、難度が上がる。これらの難点はあるものの、３年間の研究期間の中で、着実に情報を積み上げていくことができた。

上記のように集めてきた情報の１つ１つは禁止部分グラフの集合 $\mathcal{F}$ が満たすべき必要条件でしかない。しかしそれらの情報が十分集まれば、十分条件となる可能性が出てくる。そこで研究の後半では、集めた情報が十分条件となるかの確認作業が行われた。条件を満たすグラフが有限個しか存在しないことを示すには、そのようなグラフの位数を k と $\mathcal{F}$ のみに依存する定数で上から抑えれば良い。そして位数を上から抑えるには、そのグラフの直径と最大次数を上から抑えれば良い。そこで禁止部分グラフの集合 $\mathcal{F}$ の条件を十分

蓄積したところで、それらを用いてk-連結グラフ $\mathcal{F}$-フリーグラフの直径と最大次数をkと $\mathcal{F}$ のみに依存する関数で抑えることを目指した。特に最大次数を抑えることは頂点の近傍が誘導するグラフの位数を抑えることになる。これはラムゼーの定理を頂点の近傍に用いることで解決した。

４．研究成果

上記のような方法で研究を進めた結果、様々な結果を得た。それらを列挙する。

(1) 連結グラフのクラスで有限集合を生成する条件

まず次の定理を得た。

定理１　$\mathcal{F}$ を連結グラフから成る集合とする。このとき、連結な $\mathcal{F}$-フリーグラフが有限集合となるための必要十分条件は $\mathcal{F}$ が完全グラフ、スター、道を含むことである。

この定理は連結グラフのクラスの中で、有限集合を生成する禁止部分グラフの集合を完全に決定している。
しかしながら、文献調査してみると、この結果は既に1991年にDiestelにより得られていることが分かった。そこでこの後の研究は連結度が2以上の場合に移っていった。

(2) １個のグラフを禁止して有限集合を生成する条件

この場合については全ての連結度において、有限集合を生成する禁止部分グラフを決定することができた。

定理２　kを正整数、Hを連結グラフとする。このときk-連結なH-フリーグラフ全体が有限集合を生成するための必要十分条件は $H=K_2$ である。

この定理より、たった１つのグラフを禁止して有限集合を得ようとするならば、連結度がどれほど高くても、K_2 を禁止する自明な場合しかあり得ないことが判明した。

(3) ２個のグラフを禁止して有限集合を生成する条件

前項で１つのグラフを禁止する場合を片付けているので、以後禁止部分グラフに K_2 は含めないものとする。
この条件下で代表者は、まず次の定理を得た。

定理３　k を正整数、F_1, F_2 を２個の連結グラフとする。もしk-連結な $\{F_1,F_2\}$-フリーグラフ全体が有限集合を成すならば、F_1, F_2 のうち一方は完全グラフ、他方はスターである。

この定理により、２個のグラフを禁止する場合は完全グラフとスターの組合せに限定すれば良いことが分かる。

完全グラフ K_l, スター$K_{1,m}$ および正整数 k について、k-連結な $\{K_l, K_{1,m}\}$-フリーグラフ全体の成す集合を $\mathcal{G}(k,K_l,K_{1,m})$ と書くことにする。$\mathcal{G}(k, K_l,K_{1,m})$ は k に関しては減少列、l および m に関しては増大列となる。これらの漸近的な振る舞いを精密に分析することができた。

定理４
① 任意の正整数kとlについて、ある正整数 m が存在して、$\mathcal{G}(k,K_l,K_{1,m})$ は無限集合となる。
② m≧3なる任意の整数mと任意の正整数kについて、ある正整数lが存在して、$\mathcal{G}(k,K_l,K_{1,m})$ は無限集合となる。
③ 任意の正整数 k と l について、$\mathcal{G}(k,K_l,K_{1,2})$ は有限集合である。
④ 任意の正整数lとmについて、ある正整数 k が存在して、$\mathcal{G}(k,K_l,K_{1,m})$ は有限集合となる。

この定理は次のように解釈できる。

① 連結度kと完全グラフK_lを固定して、スター$K_{1,m}$ の大きさを大きくしていくと、$\mathcal{G}(k,K_l,K_{1,m})$が作る増大列はいずれ無限集合に達する。

② 連結度kとスター$K_{1,m}$を固定して、完全グラフ K_l を大きくしていくと、$\mathcal{G}(k, K_l,K_{1,m})$が作る列は増大列になる。m≧3ならば、この増大列はいずれ無限集合に達する。一方 m=2 のときには、この増大列は無限集合に達することはなく、有限集合に留まり続ける。

③ 完全グラフ K_l とスター$K_{1,m}$ を固定して、連結度kを大きくしていくと、$\mathcal{G}(k, K_l, K_{1,m})$は減少列になる。この減少列はいずれ必ず有限集合に達する。

研究代表者はさらに ③ について、有限集合に至るまでの過渡的な状況を調べた。$\mathcal{G}(k, K_1, K_{1,m})$ は k に関する減少列となる。k=1 においてはこの集合はほとんどの l と m について無限集合になるが、k を大きくするといずれ有限集合になる。様々な l と m の値について、無限集合から有限集合に変化するところを調べてみると、たいていの場合には、無限集合からいきなり空集合に変化していた。しかし(l,m)の組合せによっては、無限集合から非空有限の集合を経て、空集合に達することもあった。

定理５
① $\mathcal{G}(4, K_4, K_{1,3})$ は無限集合である。
② $\mathcal{G}(5, K_4, K_{1,3})$ は１個の要素から成る集合である。
③ $\mathcal{G}(6, K_4, K_{1,3})$ は空集合である。

この定理から、$\mathcal{G}(k, K_1, K_{1,m})$ は k に関する減少列であり、いずれ空集合に収束するが、そこに達する過渡的な状況は複雑であり、非空有限の状態を経ることもあることが分かる。

研究代表者は連結度 k が小さい場合に、有限集合を生成する禁止部分グラフのペアを調べ、k≦6 までの値について、ペアの完全な決定に成功した。

定理６
① $\mathcal{G}(1, K_1, K_{1,m})$ が有限集合となるための必要十分条件は m=2 である。
② $\mathcal{G}(2, K_1, K_{1,m})$ が有限集合となるための必要十分条件は m=2 である。
③ $\mathcal{G}(3, K_1, K_{1,m})$ が有限集合となるための必要十分条件は m=2 または (l,m)=(3,3) である。
④ $\mathcal{G}(4, k_1, K_{1,m})$ が有限集合となるための必要十分条件は m=2 または (l,m)∈{(3,3), (3,4)} である。
⑤ $\mathcal{G}(5, K_1, K_{1,m})$ が有限集合となるための必要十分条件は m=2 または (l,m)∈{(3,3), (3,4), (3,5), (4,3)} である。
⑥ $\mathcal{G}(6, K_1, K_{1,m})$ が有限集合となるための必要十分条件は m=2 または (l,m)∈{(3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,3)} である。

(4) 2-連結グラフで３個のグラフを禁止して有限集合を生成する条件

続いて研究代表者は３個のグラフを禁止して有限集合を生成する問題を考えた。連結グラフのクラスについては Diestel の結果が解決を与えている。そこで次のステップとして 2-連結グラフのクラスで考え、以下の定理を得た。

定理７　連結グラフ F_1, F_2, F_3 について、2-連結な $\{F_1, F_2, F_3\}$-フリーグラフの集合が有限集合を成すための必要十分条件は、以下のいずれかがなり立つことである。
① $\{F_1, F_2, F_3\}$ が完全グラフ、スター、道から成る。
② $\{F_1, F_2, F_3\}=\{K_3, K_{2,m}, P_n\}$ (m≧3, n≧4)
③ $\{F_1, F_2, F_3\}=\{K_3, K_{2,2}, P_n\}$ (n≦5)

この定理は 2-連結グラフにおいて、有限集合を生成する３個の禁止部分グラフを完全に決定している。

(5) 3-連結グラフにおいて有限集合を生成する３個の禁止部分グラフ

最後に本研究代表者は 3-連結グラフのクラスで３個のグラフを禁止して、有限集合を生成する問題を考えた。状況はかなり複雑になり、完全決定には至らなかったが、かなりの状況を解明することができた。

3-連結な $\{F_1, F_2, F_3\}$-フリーグラフの成す集合が有限集合になるとする。今までの結果より、F_1, F_2, F_3 のいずれかが $K_{1,2}$ である場合、またこれらの中の２つが K_3 と $K_{1,3}$ である場合には、残る要素が何であれ、有限集合となる。そこでこれらの状況ではないとする。すると以下が判明した。

① F_1, F_2, F_3 の１つは完全グラフであり、もう１つは $K_{1,m}, K_{2,m}, K_{3,m}$ のいずれかである。
② $\{F_1, F_2\}=\{K_3, K_{3,m}\}$ (m≧3) ならば F_3 は道、もしくは道の一方もしくは両方の pendant 辺にもう１つ pendant 辺をつけたグラフである。
③ $\{F_1, F_2\}=\{K_4, K_{2,m}\}$ (m≧2) ならば F_3 は道である。
④ $\{F_1, F_2\}=\{K_3, K_{2,m}\}$ (m≧2) ならば F_3 は最大次数３以下の木である。
⑤ $\{F_1, F_2\}=\{K_n, K_{1,m}\}$ (n≧4, m≧4) ならば F_3 は道である。
⑥ $\{F_1, F_2\}=\{K_3, K_{1,m}\}$ (m≧4) ならば F_3 は最大次数３以下の木である。
⑦ $\{F_1, F_2\}=\{K_3, K_{1,3}\}$ ならば F_3 はカクタスである。

さらにそれぞれの場合について、F_3の構造に関するより詳しい情報を得ることもできた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 14 件）

① J.Harant, A.Kemnitz, A.Saito and I.Schiermeyer, Closures, cycles and paths, Journal of Graph Theory, 査読有, Vol.69, 2012, 314—323.

② M.Kano and A.Saito, Star-factors with large components, 査読有, Discrete Mathematics, vol.312, 2012, 2005—2008.

③ J.Fujisawa and A.Saito, A pair of forbidden subgraphs and 2-factors, 査読有, Combinatorics, Probability and Computing, Vol.21, 2012, 149—158.

④ G.Chen, K.Ota, A.Saito and Y.Zhao, Hamiltonian cycles with all small even chords, 査読有, Discrete mathematics, vol.312, 2012, 1226—1240.

⑤ G.Chen, Y.Egawa, R.J.Gould and A.Saito, Forbidden pairs for k-connected hamiltonian graphs, 査読有, Discrete Mathematics, Vol.312, 2012, 938—942.

⑥ M.Kano, A.Kyaw, H.Matsuda, A.Saito and T.Yamashita, Spanning trees with a bounded number of leaves in a claw-free graph, 査読有, Ars Combinatoria, Vol.103, 2012, 1—13.

⑦ H.Bruhn and A.Saito, Clique or hole in claw-free graphs, 査読有, Journal of Combinatorial Theory, Series B, Vol.103, 2012, 137—154.

⑧ J.Fujisawa, S.Fujita, M.D.Plummer, A.Saito and I.Schiermeyer, A pair of forbidden subgraphs and perfect matchings in graphs of high connectivity, 査読有, Combinatorica, Vol.31, 2011, 1—13.

⑨ R.E.L.Aldred, Y.Egawa, J.Fujisawa, K.Ota and A.Saito, The existence of a 2-factor in $K_{1,n}$-free graphs with large connectivity and large edge-connectivity, 査読有, Journal of Graph Theory, vol. 68, 2011, 77—89.

⑩ K.Ota, M.D.Plummer and A.Saito, Forbidden triples for perfect matchings, 査読有, Journal of Graph Theory, vol. 68, 2011, 250—259.

⑪ J.Fujisawa, A.Saito and I.Schiermeyer, Closure for spanning trees and distant area, 査読有, Discussiones Mathematicae Graph Theory, vol.31, 2011, 143—159.

⑫ S.Akbari, A.Doni, M.Ghanbari, S.Jahanbekam and A.Saito, List-coloring of graphs and cycles of length divisible by a given number, 査読有, Contemporary Mathematics, vo.531, 2010, 117—125.

⑬ K.Kimura, M.Koyama and A.Saito, Small alliances in a weighted graph, 査読有, Discrete Applied Mathematics, vol.158, 2010, 2071—2074.

⑭ R.E.L.Aldred, J.Fujisawa and A.Saito, Forbidden subgraph and the eixistence of a 2-factor, 査読有, Journal of Graph Theory, vol.64, 2010, 250—266.

〔学会発表〕（計 10 件）

① 斎藤明, The local Chvatal—Erdos condition and 2-factors in graphs, 日本数学会年会, 2013 年 3 月 20 日、京都大学

② 斎藤 明, Star-factors with large components、日本数学会秋季相互宇分科会、2012 年 9 月 19 日、九州大学

③ Akira Saito, Forbidden subgraphs generating a finite set, 招待講演, The 5th. International Workshop on Optimal Networks Topologies, 2012 年 7 月 27 日, Bandung Institute of Technology, Indonesia

④ Akira Saito, The local Chvatal-Erdos condition and 2-factors, International Conference on Cycles in Graphs, 2102 年 6 月 1 日, Vanderbilt University, U.S.A.

⑤ 斎藤 明, Forbidden subgraphs generating a finite set, 日本数学会年会,

2012年3月26日，東京理科大学

⑥ 斎藤 明, Forbidden subgraphs and the existence of a 2-factor, 日本数学会, 2012年3月26日，東京理科大学

⑦ Akira Saito, Forbidden subgraphs and 2-factors, 招待講演, Atlanta Lecture Series in Combinatorics and Graph Theory IV, 2011年11月6日, Georgia State of University, U.S.A.

⑧ Akira Saito, Forbidden subgraphs and 2-factors, 招待講演, 4th. International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications, 2011年3月21日, Elgersburg, Germany

⑨ Akira Saito, Forbidden subgraphs generating a finite set, 招待講演, Workshop Cycle and Colourings 2010, 2010年9月5日, Tatranska Strba, Slovakia

⑩ Akira Saito, Forbidden subgraphs and factors in graphs, 招待講演, 8th. French Combinatorial Conference, 2010年7月2日, University of Paris XI, France

６．研究組織

(1)研究代表者

斎藤 明 (SAITO AKIRA)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：90186924

(2)研究分担者

( )

研究者番号：

(3)連携研究者

( )

研究者番号：