

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 7 日現在

機関番号：25403

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22500136

研究課題名（和文） 最大排他的論理和充足可能性問題の反復解法の解析

研究課題名（英文） Analysis of Iterative Algorithms for MAX-XORSAT problems

研究代表者

三村 和史 (MIMURA KAZUSHI)

広島市立大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：40353297

研究成果の概要（和文）：

疎なハイパーグラフで定義される最大排他的論理和充足可能性問題の反復解法について、経路積分法によって性能を解析した。反復解法の定常状態についても、適切な仮定の下で評価を行い、その性能の保証を与えた。

研究成果の概要（英文）：

We have analysed an iterative algorithm for MAX-XORSAT, which is defined on a sparse hypergraph, by the generating functional analysis and have obtained an analytical solution to this problem. Introducing a certain assumption, we have also had a stationary property. These results guarantee its performance.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・知能情報学

キーワード：充足可能性問題，経路積分法，ダイナミクス，反復解法

1. 研究開始当初の背景

ブール論理式（ブール変数と論理演算とからなる式）が与えられたとき、ブール論理式が「真」になるようなブール変数への値の割り当てが存在するならば、そのブール論理式は充足可能という。任意のブール論理式は、いくつかの節（ブール変数またはそれらの否定を論理和で結合したもの）を論理積で結合した乗法標準形と呼ばれる形式で表現でき

る。

ある乗法標準形のブール論理式が与えられたとき、それが充足可能かどうかを問う問題は充足可能性問題（SAT）と呼ばれる。ブール論理式に含まれる変数の数が十分に大きく、ブール論理式をランダムに生成した問題群を考えたとき、どのような条件で充足可能となるかといった、問題の巨視的な構造を捉える研究が情報統計力学の立場から近年盛んに続けられている。SAT は NP 完全とい

う問題のクラスに属することが知られており、ブール変数の個数に関して多項式程度の計算時間で答えを得るアルゴリズムは存在しないと予想されている。このため、多項式時間で実行できる良い近似アルゴリズムを設計することが主な論点となる。

SAT では、ブール論理式を構成する各々の節はブール変数もしくはその否定の論理和であるが、これを排他的論理和で置き換えた問題は排他的論理和充足可能性問題 (XORSAT) と呼ばれる決定問題である。XORSAT のブール論理式に含まれる節ができるだけ多く「真」になるようにするブール変数の値 (または「真」となる節の数) を求める問題は、最大排他的論理和充足可能性問題 (MAX-XORSAT) と呼ばれる最適化問題となる。

ブール変数をノードで、また節に含まれるブール変数の集合をハイパーエッジで表現すると、これらの問題はハイパーグラフで表現できる。これまでの最適解の性質の議論の進展と比較して、この種の疎なグラフ上で定義される反復アルゴリズムの動的な性質の解析は議論が始まって日が浅く、まだ単純で特殊な場合についての解析しかない。計算機実験による反復アルゴリズムの性能の評価は、アルゴリズム自身の持つ巨視的な構造を捉えるためには十分ではない。このため、反復アルゴリズムの性質を理解するには、反復アルゴリズムの動的な性質を直接、解析することが不可欠である。

2. 研究の目的

本研究課題では、特に MAX-3-XORSAT (各節に含まれるブール変数の数が 3 の MAX-XORSAT) の近似解を求める反復解法をモデルとして、その性能を経路積分法によって漸近的に厳密に評価することを主な目的とする。

MAX-3-XORSAT は次のような問題である。2 元体上の線形方程式の最大尤度解を探索する問題を考える。2 値をとる変数の中から 3 つの変数がある一定の確率で一様に選んで、それらの変数の排他的論理和の式をいくつか生成する。問題の構造は、図 1 のように 2 部グラフで表わされる。次に、埋め込み解を確率的に選び、先ほど選んだ論理式の値を求めることによって、連立線形方程式を得る。この論理式の値のある確率で反転させる。誤りを含んだ連立方程式から埋め込み解を求める問を扱う。このような、方程式に予め解を埋め込んである問題は解埋め込み型問題と呼ばれている。

この誤りを含んだ方程式から、正しい埋め込み解を求める問題は、Most Likely Solution 問題と呼ばれる。一方で、最も多くの方程式

を満たすことのできる解を求める問題が、MAX-XORSAT 問題である。MAX-XORSAT 問題は NP 困難であるが、平均的にはある程度解くことができる近似解法が報告されている。ここでは、MAX-3-XORSAT 問題と類似した問題についても適用されている確率伝搬法に基づく近似解法について議論する。これまで、方程式の採用確率について、任意の論理式の値の反転確率について、前処理を施した確率伝搬法に基づく近似解法によって高い確率で完全に埋め込み解が推定できることなどが示されており、埋め込み解が推定できる。

MAX-3-XORSAT では、近似的反復解法のみでは、解を求めることができない。サンプリング手法などによって解と相関を持つ推定値を得ることができるが、このような「粗い」近似解から正しい解を得るために近似的反復解法を用いることができる。

方程式の採用確率が変数の個数の 2 乗に反比例する場合、すなわち変数の個数と方程式の個数が比例する場合に、確率伝搬法に基づく近似解法によってどの程度埋め込み解の情報得られるか、という性能を調べるために、近似解法の挙動を解析的に調べる。

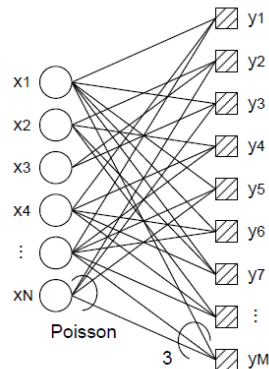


図 1 問題を表現するグラフ。

3. 研究の方法

この種のアルゴリズムの解析を行う手法は、経路積分法や空洞法、動的レプリカ法などがあるが、どれも疎な通常のグラフ上で定義されるアルゴリズムは取り扱っていない。ここでは、変数の数の多い極限で経路積分を用いて疎なハイパーグラフ上で定義されたアルゴリズムの評価を行う。

自己平均性を仮定し、因数分解可能な初期分布とする。近似解法を、時刻の推定値への遷移確率で表わすと、全ての時刻の全ての推定値の同時分布を与えることができる。この同時分布を用いて、各時刻各変数の期待値が評価できる。各時刻で多くの変数があるが、

統計的に等価な単一の変数の時間変化を導くことによって解析を行う。

4. 研究成果

母関数を漸近的に評価すると、母関数に含まれる積分の支配的な点の条件が導かれる。これによって、各変数の推定値の変化を表す同時分布関数が求まる。さらに、これによって変数の推定値が+1となるノードの割合等評価することができる。

同時分布がどのような構造を持つかは、次のように解釈される。単一変数の経路を計算するために、

- (1) 周辺の関数ノード数がポアソン分布から選ばれる。
- (2) 周辺の変数ノードの経路がそれぞれの分布からサンプルされる。
- (3) 周辺の変数ノードの経路から（中心の）ノードの経路が決められる。

となっていると理解できる。関数ノードから3つの変数ノードに接続していて、その3つが互いに残りの2から情報を得て、次時刻での推定値を決めるという構造が解析結果にも現れていることがわかる。この様子は図2のようにまとめられる。図2上のように、周辺の変数と矛盾なく確率分布が決められる。これを用いて、図2下のように、同じ確率分布従う確率変数からの値によって中央の変数の値が決まることになる。

また、反復解法を十分に繰り返した場合の解析も行った。この解析では、推定値が平衡状態にあるという強い仮定を導入した。これによって、反復が平衡状態にある場合に、そのような推定結果が得られるかを評価できる。

この研究成果の公表のため2件の国内会議での発表を行った。また、現在、国際英文誌への投稿準備中である。精密な数値解析や、十分な数値実験は、期間終了後も引き続き行っている。

また、MAX-XORSATの研究と数理的に関連の深いいくつかの問題についても研究を行った。

圧縮センシングは、線形観測から、スパース性を利用して、観測よりも次元の高い信号を再構成する問題である。この圧縮センシングについて、確率伝搬法に基づく近似再構成反復法を経路積分法によって解析した。複雑な相関を持つ解法の挙動が明らかになった。

また、線形符号の見逃し誤り確率のクエンチ平均誤り指数を、レプリカ法によって評価した。イレギュラーな検査行列を用いる場合、アニール平均誤り指数との差がある場合があることがわかった。線形符号については、

そのほかに、低密度生成行列符号の重み分布のクエンチ平均指数を解析的に評価して、アニール平均指数との差異が比較的小さいことを例示した。また、有歪圧縮の効率的な復号法を提案した。

その他、電子透かしの結託攻撃への耐性評価を行うなどした。

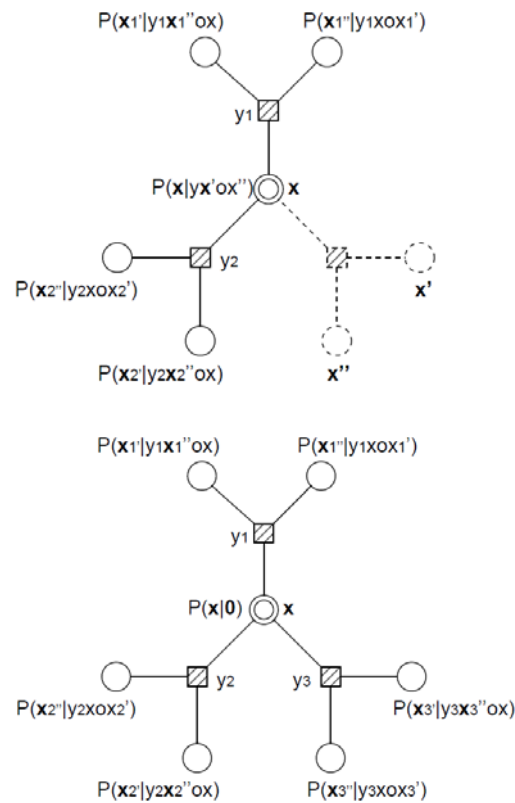


図2 結果の解釈。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

1. Sakai, Y., Mimura, K., "Robustness Evaluation of Spread-Spectrum Watermarking against Collusion Attack," Journal of the Physical Society of Japan, vol. 81, no. 2, 035005, 2 pages (2012.02). DOI: 10.1143/JPSJ.81.035005
2. Mimura, K., "Linear complexity lossy compressor for binary redundant memoryless sources," Journal of the Physical Society of Japan, vol. 80, no. 9,

093801, 4 pages (2011.08).
DOI: 10.1143/JPSJ.80.093801

3. Mimura,K., Cousseau,F., Okada,M.,” Belief propagation for error correcting codes and lossy compression using multilayer perceptrons,” Journal of the Physical Society of Japan, vol. 80, no. 3, 034802, 18 pages (2011.03).
DOI: 10.1143/JPSJ.80.034802

これらのほか、2編を投稿中で、3編を投稿準備中である。

[学会発表] (計 16 件)

1. Mimura,K., Wadayama,T. and Kabashima,Y. ”Average Growth Rate of Low-Density Generator-Matrix Codes Ensembles, Proceedings of the 2012 IEEE International Symposium on Information Theory and its Applications (ISITA2012, Honolulu, US) (2012.10).
2. Mimura,K., “Generating Functional Analysis of Iterative Algorithms for Compressed Sensing,” Proceedings of the 2011 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT2011, Saint Petersburg, Russia), 1432-1436 (2011.08.02)
3. Mimura,K., Wadayama,T., Tanaka,T. and Kabashima,Y., “Average Error Exponent of Undetected Error Probability of Binary Matrix Ensembles,” Proceedings of the 2011 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT2011, Saint Petersburg, Russia), 1387-1391 (2011.08.02)
4. 三村和史, Coolen,A.C.C., “最大排他的論理和充足可能性問題の反復解法の解析,” 第 35 回情報理論とその応用シンポジウム(SITA2012) (2012.12).
5. 三村和史, 杉本純平, 平林晃, “2次元データ圧縮センシングの反復再構成法,” 第 35 回情報理論とその応用シンポジウム(SITA2012) (2012.12).
6. 杉本純平, 平林晃, 三村和史, “2次元データ圧縮センシングの反復再構成法,” 第 27 回信号処理シンポジウム(SIP2012) (2012.12).
7. 三村和史, “最大充足可能性問題の近似解法の解析,” 誤り訂正符号のワークショップ (2012.09.27).

8. 三村和史, 和田山正, 田中利幸, 樺島祥介, “2元行列アンサンブルの見逃し誤り確率の平均誤り指数,” 第 33 回情報理論とその応用シンポジウム(SITA2010).
9. 三村和史, “圧縮センシングの反復法に基づく復元方式の性能評価,” 日本物理学会 2010 年秋季大会 (2010.09).
10. 三村和史, 和田山正, 田中利幸, 樺島祥介, “2元行列アンサンブルの見逃し誤り確率の平均誤り指数,” 日本物理学会 2010 年秋季大会 (2010.09).
11. 三村和史, 和田山正, 田中利幸, 樺島祥介, “2元行列アンサンブルの見逃し誤り確率の平均誤り指数,” LDPC符号ワークショップ (2010.09).

その他、5件の国内発表を行った。

[図書] (計 1 件)

1. 茨木俊秀, 片山徹, 藤重悟 監修, (共著) 三村和史, “数理工学事典,” 朝倉書店, 4.2, pp. 73-78, ISBN978-4-254-28003-6 (2011.11).

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等

<http://www.info.hiroshima-cu.ac.jp/~mimura/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

三村 和史 (MIMURA KAZUSHI)
広島市立大学
情報科学研究科・准教授
研究者番号：40353294

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

渡辺 治(WATANABE OSAMU)
東京工業大学大学院
情報理工学研究科・教授
研究者番号：80158617